3.18. Progresiones

Definición 3.15 Progresión aritmética
Una sucesión se dice que es una progresión aritmética si la diferencia entre cualquier término y el anterior es la misma a lo largo de toda la sucesión. La diferencia algebraica entre cada término y el anterior se denomina diferencia común, y se denota por d.

Si a es el primer término y d es la diferencia común de una progresión aritmética, los términos sucesivos de la progresión aritmética son a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, ...

Teorema 3.32 *La suma de n términos de una progresión aritmética con primer término a y diferencia común d está dado por*

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d].$$

Demostración
Si a es el primer término y d es la diferencia común de una progresión aritmética, la sucesión es

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad ....$$

Si la sucesión consta de n términos y si k denota el último término, $k = a+(n-1)d$. El penúltimo término será $k-d$, el antepenúltimo término será $k-2d$, etc. Si S_n representa la suma de estos n términos, entonces

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + (k-2d) + (k-d) + k$$

Si escribimos esta progresión en orden inverso, la suma es la misma, de modo que

$$S_n = k + (k-d) + (k-2d) + ... + (a+2d) + (a+d) + a$$

Sumando los dos valores de S_n, obtenemos

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a+k) + (a+d+k-d) + (a+2d+k-2d) + ... + (k-d+a+d) + (k+a) \\ &= (a+k) + (a+k) + (a+k) + ... + (a+k) + (a+k) + (a+k) \end{aligned}$$

Podemos observar que hay n términos en el lado derecho y cada uno es igual a $(a+k)$. En consecuencia

$$2S_n = n(a+k) \qquad \Rightarrow \qquad S_n = \frac{n}{2}(a+k)$$

Sustituyendo el valor de k de la ecuación $k = a+(n-1)d$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] \\ &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.49 *Dada la sucesión 2, 9, 16, 23, 30, ..., calcular:*
a) *El vigésimo tercer término;* **b)** *El n-ésimo término.*
Solución
La sucesión dada es una progresión aritmética, porque

$$d = 9 - 2 = 16 - 9 = 23 - 16 = 30 - 23 = 7$$

En consecuencia, la diferencia común es $d = 7$. También $a = 2$.

a) Cuando $n = 23$, obtenemos

$$k = 2 + (23 - 1)7 = 156.$$

b) Como $k = a + (n - 1)d$, entonces el n-ésimo término es

$$k = 2 + (n - 1)7 = 7n - 5.$$

Ejemplo 3.50 *Qué término de la sucesión 5, 14, 23, 32, ..., es 239?*

Solución

Como la sucesión es una progresión aritmética, obtenemos que $d = 9$, entonces de

$$k = a + (n - 1)d \qquad \Rightarrow \qquad 239 = 5 + (n - 1)9 \qquad \Rightarrow \qquad n = 27$$

Por lo tanto 239 corresponde al término 27.

Ejemplo 3.51 *La suma de tres números en progresión aritmética es 12 y su producto es 48. Determine tales números.*

Solución

Conviene tomar $a - d$, a, $a + d$ como los tres números en progresión aritmética, pues de su suma igual a 12 se obtiene de inmediato que $a = 4$ y por tanto de $(4 - d)4(4 + d) = 48$, se obtiene $d = \pm 2$, así los números son 2, 4, 6 y 6, 4, 2.

Ejemplo 3.52 *El último término de la sucesión 20, 18, 16, ..., es - 4. Calcule el número de términos de esta sucesión.*

Solución

Como esta sucesión es una progresión aritmética, $d = -2$ y $a = 20$, por lo tanto

$$-4 = 20 + (n - 1)(-2) \qquad \Rightarrow \qquad n = 13.$$

De esta manera podemos decir que la sucesión tiene 13 términos.

Ejemplo 3.53 *Si los términos cuarto y noveno de una progresión aritmética son 9 y 27 respectivamente, encuentre el vigésimo octavo término.*

Solución

Como estos términos pertenecen a una progresión aritmética, entonces el n-ésimo término esta dado por $k = a + (n - 1)d$, lo cual indica que el cuarto término está dado por $a + 3d = 9$ y el noveno término por $a + 8d = 27$. Resolviendo este sistema, obtenemos que $d = \frac{18}{5}$ y $a = -\frac{9}{5}$. De esta manera podemos calcular el vigésimo octavo término que está dado por

$$k = -\frac{9}{5} + (28 - 1)\frac{18}{5} = \frac{477}{5}.$$

Ejemplo 3.54 *El tercer término de una progresión aritmética es a y el término de lugar 21 es $a + 36b$, con a y b reales dados, no nulos a la vez. determine la progresión aritmética.*

Solución

Por hipótesis $a_3 = a_1 + 2d = a$ y $a_2 = a_1 + 20d = a + 36b$ de donde resolviendo el sistema para a_1 y d se obtiene $a_1 = a - 4b$ y $d = 2b$ por tanto resulta $a_n = 2bn + a - 6b$ que es la progresión aritmética pedida.

Ejemplo 3.55 *Determine la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética, cuyo tercer término es 4 veces el primero y su sexto término es 17.*

Solución
$a_3 = 4a_1$ y $a_6 = 17$ conducen a resolver el sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 4a_1 \\ a_1 + 5d = 17 \end{cases}$$

de donde $a_1 = 2$ y $d = 3$, por tanto

$$S_{100} = 50[4 + 99 \cdot 3] = 15050.$$

Ejemplo 3.56 *Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 metros uno del otro, se mueven al encuentro mutuo. El primero recorre 10 metros por segundo, y el segundo recorrio 3 metros en el primer segundo; en cada segundo siguiente recorre 5 metros mas que en el anterior. Después de cuántos segundos los cuerpo se encuentran?*
Solución
Supongamos que el encuentro se produce después de x segundos, en tal caso el primer cuerpo recorrio un camino igual a $10x$, el segundo cuerpo recorrio un camino igual a la suma de los terminos de la progresión aritmética:

$$S = 3 + (3 + 5) + (3 + 5 \cdot 2) + ... + [3 + 5(x - 1)].$$

Por los datos del problema

$$10x + S = 153 \qquad \text{ó} \qquad 10x + \frac{5x + 1}{2} \cdot x = 153$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, hallamos que $x = 6$.

Ejemplo 3.57 *Pueden los números que expresan las longitudes de los lados de un triangulo y su perímetro, formar una progresión aritmética?*
Solución
Supongamos que las longitudes de los lados forman una progresión aritmética, en este caso se los puede designar por a, $a + d$, $a + 2d$, siendo su perímetro igual a $3a + 3d$. La diferencia entre el perímetro y el lado mayor es

$$(3a + 3d) - (a + 2d) = 2a + d$$

y, puesto que $2a + d > d$, el perímetro no es el cuarto término de la progresión aritmética.

Ejemplo 3.58 *En una progresión aritmética si los términos de lugares p, q y r son respectivamente, a, b y c. Demuestre que*

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$$

Solución
Por hipótesis se tienen

$$\begin{cases} a_1 + (p - 1)d = a \\ a_1 + (q - 1)d = b \\ a_1 + (r - 1)d = c \end{cases}$$

de este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_1 - d = a - pd = b - qd = c - rd$$

y de aquí

$$\begin{cases} p-q=\frac{1}{d}(a-b) \\ q-r=\frac{1}{d}(b-c) \\ r-p=\frac{1}{d}(c-a) \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por c, la segunda por a y la tercera por b, se tiene

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$$

Ejemplo 3.59 *Encuentre la suma de todos los números entre 100 y 1000, que sean divisibles por 14.* **Solución**
El primer número después del 100, divisible por 14 es 112, luego $a_1 = 112$ y $d = 14$, entonces

$$a_n = 112 + (n-1)14 < 1000 \quad \Rightarrow \quad n < 64,43$$

luego $n = 64$ con lo que

$$S_{64} = 32[2 \cdot 112 + 63 \cdot 14] = 35392.$$

Ejemplo 3.60 *Si la suma de m términos de una orogresión aritmética es a la suma de n términos, como m^2 es a n^2. Demuestre que*

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

Solución
Como

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

entonces

$$\frac{m[2a_1+(m-1)d]}{n[2a_1+(n-1)d]} = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad d = 2a_1$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{a_n} &= \frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d} \\ &= \frac{a_1+(m-1)2a_1}{a_1+(n-1)2a_1} \\ &= \frac{2m-1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.61 *En una progresión aritmética cuyo primer término es a, si la suma de los p primeros términos es cero, demuestre que la suma de los siguientes q términos es*

$$\frac{a(p+q)q}{1-p}$$

Solución
Por hipótesis tenemos

$$S_p = \frac{p}{2}[2a+(p-1)d] = 0, \;\; p \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2a+(p-1)d = 0$$

de donde $d = \frac{2a}{1-p}$, $p \neq 1$; por otra parte $S = S_{p+q} - S_p$, S es la suma de los q siguientes términos, ahora como $S_p = 0$, entonces

$$\begin{aligned} S &= S_{p+q} \\ &= \frac{p+q}{2}\left[2a + (p+q-1)\frac{2a}{1-p}\right] \\ &= \frac{a(p+q)q}{1-p}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.62 *Si la suma de los primeros p términos de una progresión aritmética es q y la suma de los q primeros términos es p. Demuestre que la suma de los primeros $p+q$ términos es $-(p+q)$.*

Solución

Nos dicen que

$$\begin{cases} S_p = \frac{p}{2}[2a_1 + (p-1)d] = q \\ S_q = \frac{q}{2}[2a_1 + (q-1)d] = p \end{cases}$$

resolviendo éste sistema de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{cases} d = -\frac{2(p+q)}{pq} \\ a_1 = \frac{q^2 + (p-1)(p+q)}{pq} \end{cases}$$

por tanto

$$S_{p+q} = \frac{p+q}{2}[2a_1 + (p+q-1)d]$$

y reemplazando los valores de a_1 y d, obtenemos luego de simplificar, que

$$S_{p+q} = -(p+q).$$

Ejemplo 3.63 *En una progresión aritmética se conoce la suma S_m de los m primeros términos y la suma S_n de los n primeros términos. Calcular la diferencia de la progresión aritmética.*

Solución

De inmediato

$$\begin{cases} S_m = \frac{m}{2}[2a_1 + (m-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} -2nS_m = -2nma_1 + n(m-1)d \\ 2mS_n = 2nma_1 + m(n-1)d \end{cases}$$

sumando miembro a miembro resulta

$$2(mS_n - nS_m) = dmn(m-n) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2(mS_n - nS_m)}{mn(m-n)}, \;\; m \neq n.$$

Ejemplo 3.64 *Si $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ están en progresión aritmética, demuestre que*

$$n^2 = (kn)^{log_k m}$$

Solución

Como $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ están en progresión aritmética, entonces

$$\log_m x - \log_k x = \log_n x - \log_m x$$

llevando a base 10 se tiene

$$\frac{2\log x}{\log m}=\frac{\log x}{\log k}+\frac{\log x}{\log n}\quad\Rightarrow\quad 2\log k\log n=\log m\log n+\log m\log k$$

$$\log n^2=\log_k m(\log n+\log k)\quad\Rightarrow\quad n^2=(kn)^{log_k m}$$

Ejemplo 3.65 *Una persona debe pagar una deuda de \$ 360000 en 40 cuotas que forman una progresión aritmética cuando 30 de los pagos están cubiertos la persona fallece, dejando la tercera parte de la deuda sin pagar. Calcule el valor del primer pago.*
Solución
Sean a_1 y d el primer término y la diferencia de la progresión aritmética en cuestión, entonces

$$\begin{cases} S_{40}=20[2a_1+39d]=360000\\ S_{30}=15[2a_1+29d]=\frac{2}{3}\cdot 360000\end{cases}$$

de donde resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene $d=200$ y $a_1=5100$.

Supongamos que a_{k-1}, a_k, a_{k+1} son tres términos sucesivos de una progresión aritmética. En tal caso, por propiedad de la progresión tendremos:

$$a_k-a_{k-1}=a_{k+1}-a_k\qquad\Rightarrow\qquad 2a_k=a_{k-1}+a_{k+1}\qquad\Rightarrow\qquad a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}.$$

Definición 3.16 Media aritmética
Se llama media aritmética la semisuma de dos números; por lo tanto, cualquier término de una progresión aritmética (excepto el primero) es la media aritmética de dos de sus términos contiguos.

Ejemplo 3.66 *Intercalar 7 medias aritméticas entre los numeros 8 y 20.*
Solución
Esto significa que se deben hallar 7 números tales que junto con los números dados 8 y 20 formen una progresión aritmética; el primer término de esta progresión es el 8, el noveno, el número 20. Tendremos que

$$a_9=a_1+8d\qquad\Rightarrow\qquad 20=8+8d\qquad\Rightarrow\qquad d=1{,}5.$$

La progresión buscada será:

$$8;\quad 9{,}5;\quad 11;\quad 12{,}5;\quad 14;\quad 15{,}5;\quad 17;\quad 18{,}5;\quad 20.$$

Ejemplo 3.67 *Dada la progresión aritmética* $-35x$, *...,* $3x$*;* $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. *Calcular* a_n *sabiendo que existen 17 términos entre los extremos.*
Solución
De inmediato $a_1=-35x$ y $a_{19}=3x$, entonces

$$-35x+18d=3x\quad\Rightarrow\quad d=\frac{19}{9}x$$

por tanto

$$a_n=-35x+(n-1)\frac{19}{9}x.$$

Ejemplo 3.68 *Hallar la relación entre* x *e* y*, de manera que el medio aritmético de lugar* r*, entre* x *y* $2y$*, sea el mismo que el medio aritmético de lugar* r *entre* $2x$ *e* y*. Habiendo* n *medios aritméticos interpolados en cada caso.*

Solución
Para el primer caso:

$$2y = x + (n+1)d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{2y-x}{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_r = x + rd_1$$

para el segundo caso

$$y = 2x + (n+1)d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{y-2x}{n+1} \quad \Rightarrow \quad b_r = 2x + rd_2$$

Ahora por hipótesis $a_r = b_r$ de donde

$$x + r\frac{2y-x}{n+1} = 2x + r\frac{y-2x}{n+1} \quad \Rightarrow \quad x(n-r+1) = yr$$

Definición 3.17 Progresión geométrica
Una sucesión de términos es una progresión geométrica si la razón de cada término anterior es siempre la misma. Esta razón constante se denomina razón común de la progresión geométrica.

Cada término de una progresión geométrica se obtiene multiplicando al anterior por la razón común. Si b es el primer término y r es la razón común, los términos sucesivos de la progresión geométrica son

$$b, \;\; br, \;\; br^2, \;\; br^3, \;\; ...$$

En esta progresión geométrica, observamos que la potencia de r en cualquier término es menor en uno a la anterior. Así que, el n-ésimo término está dado por $t = br^{n-1}$

Teorema 3.33 *Si b es el primer término y r la razón común de una progresión geométrica, entonces la suma S_n de n-términos de la progresión geométrica está dada por*

$$S_n = \frac{b(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

Demostración
Los n-términos de la progresión geométrica dada son

$$b, \;\; br, \;\; br^2, \;\; br^3, \;\; ..., br^{n-2}, \;\; br^{n-1}.$$

Por tanto, la suma de estos términos es

$$S_n = b + br + br^2 + br^3 + ... + br^{n-2} + br^{n-1}$$

Multiplicamos ambos lados por $-r$, y obtenemos

$$-rS_n = -br - br^2 - br^3 - br^4 - ... - br^{n-1} - br^n$$

Sumando estas dos ecuaciones, advertimos que todos los términos se cancelan excepto el primer término de la primera ecuación y el último término de la segunda ecuación, lo que resulta

$$S_n - rS_n = b - br^n \quad \Rightarrow \quad (1-r)S_n = b(1-r^n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{b(1-r^n)}{1-r}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la ecuación por -1, obtenemos la fórmula alternativa $S_n = \frac{b(r^n-1)}{r-1}$. Esta fórmula por lo general se usa cuando $r > 1$, mientras que la ecuación $S_n = \frac{b(1-r^n)}{1-r}$ es más útil cuando $r < 1$. La fórmula $S_n = \frac{b(r^n-1)}{r-1}$ es válida sólo cuando $r \neq 1$. Si $n = 1$, la progresión geométrica se transforma en $\underbrace{b + b + b + ... + b}_{n \text{ términos}}$ cuya suma es igual a nb.

Ejemplo 3.69 *Encuentre el décimo tercer término de la sucesión 3, 6, 12, 24, ...*
Solución
Como esta sucesión es una progresión geométrica, entonces $r = 2$. Por lo tanto, el décimo tercer término será

$$t = (3)(2)^{13-1} = 12288.$$

Ejemplo 3.70 *Encuentre el n-ésimo término de la sucesión* $\frac{2}{9}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ...
Solución
Como $r = -\frac{3}{2}$, por lo tanto se trata de una progresión geométrica y el n-ésimo término estará dado por

$$t = \left(\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}.$$

Ejemplo 3.71 *El segundo y quinto término de una progresión geométrica son 24 y 81, respectivamente. Determine la sucesión y el décimo término.*
Solución
El segundo y quinto términos quedan determinados por $ar = 24$ y $ar^4 = 81$ respectivamente. Igualando estas dos ecuaciones, obtenemos que $r = \frac{3}{2}$ y $a = 16$, por lo tanto el término genérico es $l = (16)\,(3/2)^{n-1} = \left(\frac{32}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n$ y el décimo término es $\frac{19683}{32}$.

Ejemplo 3.72 *Determine la suma de:*

a) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(5-\sqrt{13}}\,)^i$; **b)** $S_n = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^i$.

Solución
a) Desarrollando el símbolo de sumatoria, obtenemos

$$S_n = \frac{1}{(5-\sqrt{13}}\,) + \frac{1}{(5-\sqrt{13}}\,)^2 + \frac{1}{(5-\sqrt{13}}\,)^3 + ... + \frac{1}{(5-\sqrt{13}}\,)^n$$

de donde podemos calcular $r = \frac{1}{5-\sqrt{13}}$, lo cual indica que se trata de una progresión geométrica y, de esta manera podemos encontrar la suma pedida

$$S_n = \frac{(5-\sqrt{13})^n - 1}{(4-\sqrt{13})(5-\sqrt{13})^n}.$$

b) Como

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^i - \sum_{i=1}^{1} (-1)^i \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^i \\ &= -\sqrt{\frac{3}{5}} + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + ... + (-1)^n \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^n - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \end{aligned}$$

podemos encontrar que $r = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ lo cual nos indica que se trata de una progresión geométrica y de esta manera encontramos el valor de la identidad pedida:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}\left(1 - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^n\right)}{1 + \sqrt{\frac{3}{5}}} + \sqrt{\frac{3}{5}} \\ &= \frac{(-1)^n(\sqrt{3})^{n+1} + 3(\sqrt{5})^{n-1}}{(\sqrt{5})^n(\sqrt{5}+\sqrt{3})}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.73 *La suma de los 6 primeros términos de una progresión geométrica es 9 veces la suma de los tres primeros términos, determine su razón. ($a_1 \neq 0$, $r \neq 1$)*

Solución

Como

$$S_6 = 9S_3 \quad \Rightarrow \quad a_1\frac{r^6-1}{r-1} = 9a_1\frac{r^3-1}{r-1} \quad \Rightarrow \quad (r^3-1)(r^3+1) = 9(r^3-1)$$

como $r \neq 1$, entonces

$$r^3+1 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

Ejemplo 3.74 *El producto de tres números en prpgresión geométrica es 27 y la suma de sus recíprocos es 3. Encuentre tales números.*

Solución

En este caso conviene tomar $\frac{a}{r}$, a, ar como los tres números en progresión geométrica, por tanto

$$\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar = 27 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

luego

$$\frac{r}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3r} = 3 \quad \Rightarrow \quad r^2-8r+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 4\pm\sqrt{15}$$

y los números son

$$\frac{1}{4\pm\sqrt{15}}, \quad 3, \quad 3\left(4\pm\sqrt{15}\right)$$

Ejemplo 3.75 *En una progresión geométrica si los términos de lugares p, q y r son respectivamente: a, b y c. Demuestre que*

$$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1$$

Solución

Sea x el primer término e y la razón de la progresión geométrica, luego

$$xy^{p-1} = a, \quad xy^{q-1} = b, \quad xy^{r-1} = c$$

de donde obtenemos

$$\begin{cases} a^{q-r} = x^{q-r}y^{(p-1)(q-r)} \\ b^{r-p} = x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)} \\ c^{p-q} = x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)} \end{cases}$$

multiplicando miembro a miembro, finalmente obtenemos

$$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1$$

Ejemplo 3.76 *Calcular la suma*

$$2+\frac{a+b}{ab}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+...+\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}$$

Solución

Reordenando la suma, obtenemos

$$\begin{aligned} S &= 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+...+\frac{1}{a^n}+1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+...+\frac{1}{b^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{a}-1}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}+\frac{b^{n+1}-1}{b^n(b-1)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.77 *Si a, b, c, d están en progresión geométrica, demuestre que*

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$$

Solución
Como a, b, c, d están en progresión geométrica, entonces

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b^2=ac \\ c^2=bd \\ bc=ad \end{cases}$$

Ahora

$$\begin{aligned} (b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2 &= 2b^2+2c^2+a^2+d^2-2ac-2bc-2bd \\ &= 2ac+2bd+a^2+d^2-2ac-2ad-2bd \\ &= a^2+d^2-2ad \\ &= (a-d)^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.78 *Encuentre la suma de n términos de la sucesión cuyo k-ésimo término es*

$$a_k=(2k+1)2^k$$

Solución
Como

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)2^k \quad \Rightarrow \quad 2S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)2^{k+1}$$

de donde restando miembro a miembro estas sumas, se tiene

$$2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)2^{k+1}-\sum_{k=1}^{n}(2k+1)2^k$$

entonces

$$\begin{aligned} S_n &= (2n+1)2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)2^{k+1}-\sum_{k=2}^{n}(2k+1)2^k-3\cdot 2 \\ &= (2n+1)2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)2^{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)2^{k+1}-3\cdot 2 \\ &= (2n+1)2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)2^{k+1}-6 \\ &= (2n+1)2^{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+2}-6 \\ &= (2n+1)2^{n+1}-8\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-6 \\ &= n\cdot 2^{n+2}-2^{n+1}+2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.79 *Un ventilador gira a 1200 revoluciones por minuto (rpm). Después de apagar el motor del ventilador, éste disminuye gradualmente su velocidad de manera que cada segundo efectúa sólo 90 % de las revoluciones del segundo anterior. ¿Cuántas revoluciones efectuará el ventilador durante el primer minuto, después de apagarlo?*

Solución

Cuando gira a 1200 rpm, el ventilador girará $\frac{1200}{60}$ o 20 revoluciones por segundo. El número de revoluciones por segundo para los segundos posteriores a apagar el ventilador, formarán una progresión geométrica donde $b_1 = 18$ y $r = 0{,}9$; entonces,

$$18, \quad 18(0{,}9), \quad 18(0{,}9)^2, \quad ..., 18(0{,}9)^{n-1}$$

Como un minuto tiene 60 segundos, el problema se reduce a encontrar S_{60}, lo que se puede lograr por aplicación de la fórmula para la obtención se S_n es una progresión geométrica:

$$\begin{aligned} S_{60} &= \frac{18(1-0{,}9^{60})}{1-0{,}9} - \frac{18}{0{,}1} \\ &= 180 \text{ revoluciones.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.80 *Cuatro números forman una progresión geométrica decreciente. Sabiendo que la suma de los términos extremos es igual a 27, y la suma de los términos medios, igual a 18, hallar su progresión.*

Solución

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^3 = 27 \\ a_1 q + a_1 q^2 = 9 \end{cases}$$

Dividamos la primera ecuación por la segunda:

$$\frac{1 - q + q^2}{q} = 3$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtendremos $q = 2 \pm \sqrt{3}$. Solamente $q = 2 - \sqrt{3}$ satisface las condiciones del problema dado, puesto que la progresión debe ser decreciente y, por eso $|q| < 1$. El primer término de la progresión lo hallamos de la correlacion

$$a_1(q + q^{23}) = 9 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \frac{3}{2}(9 + 5\sqrt{3})$$

Ejemplo 3.81 *La suma de tres numeros positivos, que forman una progresión aritmética, es igual a 21. Si a estos números les sumamos respectivamente 2, 3 y 9, los nuevos números forman una progresión geométrica. Hallar esos números.*

Solución

Supongamos que x, y y z son los números buscados. En tal caso $x + y + z = 21$, y, puesto que los números x, y, z forman una progresión aritmética, tendremos que $2y = x+z$. Por las condiciones del problema $x+2$, $y+3$, $z+9$ componen una progresión geométrica, es decir, $(y+3)2 = (x+2)(z+9)$. Se obtuvo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ 2y = x + z \\ (y+3)^2 = (x+2)(z+9) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que los números buscados son 3, 7 y 11.

Ejemplo 3.82 *Calcular los ángulos de un cuadrilátero sabiendo que estos ángulos están en progresión geométrica y que el ángulo mayor es 9 veces el segundo.*

Solución

Supongamos $r > 1$, entonces los ángulos son a, ar, ar^2 y ar^3 tales que $a < ar < ar^2 < ar^3$ y $9ar = ar^3$, de donde $r = 3$. Por otra parte de la geometría elemental sabemos que

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad a + 3a + 9a + 27a = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad a = 9^\circ$$

luego los ángulos resultan ser: 9°, 27°, 81° y 243°. Si se supone $r < 1$, $r = \frac{1}{3}$ y $a = 243^\circ$ y resultan los mismos ángulos.

Ejemplo 3.83 *En un cuadrado de lado a se inscribe otro cuadrado cuyos vértices dividen los lados del primer cuadrado en la razón 1 : 1. En el segundo cuadrado se inscribe un tercer cuadrado que divide a los lados del anterior en la misma razón y así sucesivamente. Encontrar la suma de los perímetros y áreas de n de estos cuadrados, cuáles son estas sumas si $n \to \infty$.*

Solución

Perímetro:

$$P_1 = 4a, \quad P_2 = 4\frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad P_3 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a, \quad ..., P_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} a$$

$$S_n^P = 4a\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right] = 4a \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Si $n \to \infty$, *entonces*

$$S^P = \frac{8}{2 - \sqrt{2}}a.$$

Area:

$$A_1 = a^2, \quad A_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a^2, \quad A_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 a^2, \quad ..., A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2(n-1)} a^2$$

$$S_n^A = a^2\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

si $n \to \infty$, entonces $S^A = 2a^2$.

Ejemplo 3.84 *Se deja caer una pelota de goma desde una altura h, en el primer rebote la pelota sube hasta el tercio de la altura h, en el segundo rebote sube hasta el tercio de la nueva altura y así sucesivamente. Calcule la distancia que recorre la pelota antes de detenerse.*

Solución

Se debe tener que

$$\begin{aligned} H &= h + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}h\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)\right) + ... \\ &= h\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + ...\right] \end{aligned}$$

Se trata de una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3} < 1$, por tanto la suma de infinitos términos será

$$H = h \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}h.$$

Supongamos que a, a, a son tres terminos consecutivos de una progresión geométrica, donde el subíndice k es un numero natural cualquiera mayor que 1. En tal caso tendremos:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

cada una de estas relaciones es igual a la razon de la progresión q. Por una propiedad de la progresión tendremos:

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}.$$

Definición 3.18 Media geométrica
El número cuyo cuadrado es igual al producto de dos números dados, se llama su media geométrica. Es decir, todo término de una progresión geométrica es la media geométrica de dos términos equidistantes a él.

Ejemplo 3.85 *Intercalar entre los números 2 y 1458 cinco medias geométricas.*
Solución
La condicion del problema es: hallar cinco números tales que junto con los números dados 2 y 1458 formen una progresión geométrica cuyo primer término sea $a_1 = 2$ y el séptimo término sea $a_7 = 1458$. Tendremos que

$$a_7 = a_1 q^6 \qquad \Rightarrow \qquad 1458 = 2q^6 \qquad \Rightarrow \qquad 729 = q^6 \qquad \Rightarrow \qquad q = \sqrt[6]{729} = \pm 3$$

Son posibles dos progresiones:

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458 \qquad \text{o} \qquad 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ -486,\ 1458.$$

3.19. Tarea

1. Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética en la que todos sus términos y su diferencia d son distintos de cero. Demuéstrese que son válidas la igualdades siguientes:
   a) $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}$;
   b) $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, $k = 1, 2, ..., n$;
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$;
   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$;
   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}}\right)$.

2. En una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y el orden n, 34. Si la suma de los n primeros términos es 247, determine n y la diferencia d.
   Resp: 13 y $\frac{5}{2}$.

3. Sumar 19 términos de la sucesión $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$,...
   Resp: 0.

4. Interpolar 9 medios aritméticos entre $\frac{1}{4}$ y $-\frac{39}{4}$.
Resp: $-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{19}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{27}{4}, -\frac{31}{4}, -\frac{35}{4}$.

5. Sumar 25 términos de la sucesión $\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}$,...
Resp: $15\sqrt{5}$.

6. La suma de 4 números enteros de una progresión aritmética es 24 y su producto es 945. Hallar los números.
Resp: 3, 5, 7 y 9.

7. Encontrar la suma de todos los números entre 14 y 84 inclusive extrayendo los múltiplos de 3.
Resp: 1152.

8. Dados tres números en progresión aritmética con diferencia d, $d \in \mathbb{N}$; se sabe que uno de ellos es múltiplo de d. Demostrar que el producto de ellos es divisible por $6d^3$.

9. Si a, b, c están en progresión aritmética y $f(x) = px + q$ en que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con $p \neq 0$. Demuestre que $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ también están en progresión aritmética.

10. En la ecuación $x^4 - (3m+4)x^3 + (m+1)^2 = 0$ determine m tal que sus raíces estén en progresión aritmética.
Resp: $m = 2$.

11. Si la suma de m términos de una progresión aritmética es igual a la suma de los siguientes n términos y también a la suma de los siguientes p términos, entonces demuestre que

$$(m+n)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) = (m+p)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

12. La suma de cinco términos en una progresión aritmética es 20 y el producto entre el mayor y el menor es -20. ¿Cuáles son los términos?.
Resp: -2, 1, 4, 7, 10 o bien 10, 7, 4, 1, -2.

13. Demuestre que la suma de un número impar de términos consecutivos de una progresión aritmética es igual al término central multiplicado por el número de términos.

14. Una sucesión a_1, a_2, ..., a_n satisface la igualdad $\sum_{k=1}^{n} a_k = 3n^2 + 2n$. Demuestre que la sucesión es una progresión aritmética y encuentre una expresión para a_n en términos de n únicamente.
Resp: $a_n = 6n - 1$.

15. Si en una progresión aritmética la suma de los m primeros términos es igual a la suma de los n primeros términos, demostrar que la suma de los $m+n$ términos es nula.

16. En un triángulo rectángulo los lados están en progresión aritmética. Demostrar que la diferencia de la progresión es igual al radio de la circunferencia inscrita al triángulo.

17. La suma de tres números en progresión aritmética es 9 y la suma de sus recíprocos es nula. Determine la suma de los 20 primeros términos de esta progresión aritmética.
Resp: $30\left(2 \pm 17\sqrt{3}\right)$.

18. Una persona contrae una deuda que debe pagar en tres años en cuotas mensuales que se incrementan cada mes en una cantidad fija. Si al término de los dos primeros años la persona ha pagado la mitad de la deuda y la primera cuota del tercer año es de \$ 122000. Determine el total que la persona paga al final de los tres años.
Resp: \$ 3456000.

19. Demuéstrese que si los números positivos a, b, c son términos consecutivos de una progresión aritmética, los números

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

también son términos consecutivos de la progresión aritmética.

20. Demuéstrese que si los números positivos a_1, a_2, ..., a_n son los términos consecutivos de una progresión aritmética, entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

21. Sea S_n la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética. Demuéstrese que:
a) $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$; **b)** $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$.

22. Compruébese o refútese la siguiente aseveración: si t_1, t_2, t_3, t_4, es una progresión aritmética finita, entonces $Cost_1$, $Cost_2$, $Cost_3$, $Cost_4$, también es una progresión aritmética.

23. Si el costo de un automóvil sufre una depreciación anual de 12 %, ¿cuál será su valor después de 5 años, si el precio original del mismo era de 8600 dólares? (Sugerencia: El valor al término de cada año es 88 % del valor al término anterior.)

24. El movimiento de una clase específica de hormigas depende de la temperatura. Aparentemente, las hormigas duplican su velocidad de desplazamiento por cada 10^oC de aumento en la temperatura. Si una hormiga se desplaza a una velocidad de 60 cm/min cuando la temperatura ambiente es 10^oC, ¿cuál será la velocidad de desplazamiento a 40^oC?, ¿a 50^oC?

25. Se considera que una estrella de magnitud 6 emite una unidad de luz, mientras que una estrella de magnitud 5 emitirá 2.5 veces la luz de una estrella de magnitud 6, y una estrella de magnitud 4 emitirá 2.5 veces la luz de una estrella de magnitud 5, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades de luz emitirá una estrella de magnitud 2? ¿Y una estrella de magnitud 3?

26. La población mundial en 1970 se estimó en 3.7 x 109 habitantes. La tasa de crecimiento anual aproximada es 2 %. Suponiendo que la tasa se mantendrá constante, estímese la población mundial en los años 1990 y 2000.

27. Si cada coneja da a luz tres conejitos, ¿cuántos conejos de la octava generación serán descendientes de una coneja en la primera generación?

28. Una pelota de hule que cae desde una altura de 3 metros siempre rebotará un tercio de la distancia de la cual cayó previa al rebote. determínese la altura alcanzada en el quinto rebote.

29. El peldaño inferior de una escalera de 18 peldaños mide 45 cm. La longitud de cada peldaño es 1.6 cm. más corto que el anterior, en el sentido ascendente. Con ayuda de las teclas de sumando constante o constante automática de una calculadora electrónica manual, desarróllese una tabla que muestre la longitud de todos los peldaños.

30. Un medio de cultivo se siembra con n bacterias. Si el número de bacterias se duplica cada 2 horas, obténgase el número de bacterias existentes en el cultivo después de 24 horas.

31. En 1791, Benjamin Franklin donó 4000 dólares para ser empleados en préstamos a artesanos casados que necesitaban ayuda económica. Durante 100 años, este dinero estuvo sometido a un interés compuesto de 5,6 % anual. Calcúlese el valor aproximado del fondo en 1891.

32. Sea S_n la suma de los primeros n miembros de una progresión geométrica. Demuéstrese que

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

33. Demuéstrese que la sucesión $\{b_n\}$ de números diferentes de cero es una progresión geométrica si y sólo si con cada $n \geq 3$ se verifica la igualdad

$$(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{n-1}^2)(b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2) = (b_1b_2 + b_2b_3 + ... + b_{n-1}b_n)^2.$$

34. La suma de tres números en progresión geométrico es 70, si los extremos son amplificaciones por 4 y el del medio por 5, la serie está en progresión aritmética. Hallar los números.

35. Hallar una progresión aritmética cuyo primer término es 1, y tal que los términos de lugares 2, 10 y 34 se encuentran en progresión geométrica.

36. Si $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b-c}$ están en progresión aritmética, demostrar que a, b, c están en progresión geométrica.

37. Si m es el producto de n números en progresión geométrica, p su suma y q la suma de sus recíprocos, demuestre que

$$m^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^n$$

38. Sea k, $(k \neq 0)$, un número dado. Encontrar los números a, b, c sabiendo que a, b, c están en progresión geométrica; a, $b+k$, c están en progresión aritmética y $a+k$, $b+k$, c están en progresión geométrica.

39. Si el medio aritmético entre a y b es el doble que el medio geométrico entre a y b, demuestre que

$$\frac{a}{b} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \qquad \text{ó} \qquad \frac{a}{b} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

40. En una progresión geométrica de 5 términos, la razón es la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Hallar tales términos.
Resp: 8, 16, 32, 64, 128 o bien -12, 36, -108, 324, -972.

41. La suma de los primeros cinco términos de una progresión geométrica es 422, y la suma de los términos segundo al sexto es 633. Determine la progresión geométrica.
Resp: 32, 48, 72, 108 162.

42. Dividir el número 221 en tres partes que formen una progresión geométrica de modo que el tercer número sobrepase al primero 136.
Resp: 17, 51, 153.

43. Si a, b, c están en progresión geométrica y $f(x) = e^x$ en que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función. Demuestre que $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ también están en progresión geométrica.

44. La suma de k números de una progresión geométrica de razón 2 es 1533 y el último término es 768. Determine los k números t luego calcule la suma de 10 primeros términos de la progresión geométrica.
Resp: $k = 9$, $a_1 = 3$, $S_{10} = 3069$.

45. Si cada término de una progresión geométrica se resta del término siguiente, demuestre que las diferencias sucesivas forman otra progresión geométrica con la misma razón que la primera progresión geométrica.

46. Si $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ..., $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2})$; demuestre que

$$a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

47. Demuestre que, si $2u_1 = a + b$, $2u_2 = b + u_1$, $2u_3 = u_1 + u_2$, ... entonces

$$3u_n = a\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + b\left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

48. Si S es la suma de n números en progresión geométrica y S´ es la suma de los recíprocos de dichos números, entonces S : S´ es el producto del primer número por el último.

49. Si S_1, S_2, ..., S_p son las sumas de las series geométricas de primeros términos 1, 2, ..., p respectivamente y de razones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{p+1}$ respectivamente. Demuestre que

$$S_1 + S_2 + ... + S_p = \frac{1}{2}p(p+1)$$

Capítulo 4

Expresiones algebraicas

4.1. Expresión numérica

Con ayuda de los números, los signos de operaciones y del paréntesis se componen diferentes expresiones numéricas.

Definición 4.1 Valor numérico
Si en una expresión numérica se pueden realizar todas las operaciones indicadas en ella, el número real, obtenido como resultado de las operaciones cumplidas, se denomina valor numérico de la expresión numérica dada.

En lugar de las expresiones numéricas resulta a menudo, más cómodo analizar las expresiones, en las cuales en algunos lugares figuran letras en vez de números. Toda expresión de esta índole se denomina expresión matemática.

Definición 4.2 Expresión algebraica
La expresión matemática en la cual con los números y las letras se realizan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencia natural y extracción de una raíz aritmética, recibe el nombre de expresión algebraica.

Definición 4.3 Expresión algebraica racional
Una expresión algebraica se llama racional, si participan en ella sólo las operaciones de adición, multiplicación, sustracción, división y elevación a potencia natural. Una expresión racional se llama entera respecto de la letra dada, si no contiene la operación de división por la letra dada o por una expresión en que figura esta letra.

La expresión racional fraccionaria respecto de una letra dada es una expresión racional que contiene la operación de división por cierta expresión en la que figura esta letra.

Definición 4.4 Expresión algebraica irracional
Una expresión algebraica se denomina irracional, si en ella se prevé la operación de extracción de una raíz aritmética respecto de las letras que la integran.

Sean dadas dos expresiones algebraicas que se denotan con las letras A y B. Definamos para ellas las operaciones aritméticas.

Definición 4.5 Suma de expresiones algebraicas
Adicionar dos expresiones algebraicas A y B significa escribir formalmente la expresión algebraica $A + B$, denominada suma de las expresiones A y B.

Ejemplo 4.1 *Sean $A = 2a - b$ y $B = a - 3b + c$, entonces*

$$\begin{aligned} A + B &= (2a - b) + (a - 3b) \\ &= 3a - 4b + c. \end{aligned}$$

Definición 4.6 Producto de expresiones algebraicas
Multiplicar dos expresiones algebraicas A y B significa escribir formalmente la expresión algebraica AB denominada producto de las expresiones A y B.

Ejemplo 4.2 *Dadas $A = 5a - 3b$ y $B = -3a + 2b - 5c$, entonces*

$$\begin{aligned} AB &= (5a - 3b)(-3a + 2b - 5c) \\ &= -15a^2 + 10ab - 25ac + 9ab - 6b^2 + 15bc \\ &= -15a^2 + 19ab - 25ac + 15bc - 6b^2. \end{aligned}$$

Si hay necesidad de adicionar varias expresiones algebraicas, se suman primeramente las dos primeras expresiones y luego a la suma obtenida se le adiciona la tercera expresión, etc. De modo análogo se define también el producto de varias expresiones algebraicas. Si en un producto una misma expresión algebraica A interviene como factor n veces ($n > 1$, $n \in \mathbb{N}$), se escribe A^n en lugar del producto $\underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n \text{ veces}}$.

Definición 4.7 Diferencia de expresiones algebraicas
Sustraer de una expresión algebraica A otra expresión algebraica B significa escribir formalmente la expresión algebraica $A - B$, llamada diferencia de las expresiones A y B.

Ejemplo 4.3 *Sean $A = 9a + 4b + c$ y $B = 5a + 3b - c + d$, entonces*

$$\begin{aligned} A - B &= (9a + 4b + c) - (5a + 3b - c + d) \\ &= 4a + b + 2c - d. \end{aligned}$$

Definición 4.8 División de expresiones algebraicas
Dividir una expresión algebraica A por otra expresión algebraica B significa escribir formalmente la expresión algebraica $A \div B$, denominada cociente de la división de la expresión A por la expresión B.

Ejemplo 4.4 *Sean $A = a - 2b + c$ y $B = 2a - b - 2c - d$, entonces*

$$\frac{A}{B} = \frac{a - 2b + c}{2a - b - 2c - d}.$$

Ejemplo 4.5 *Simplifique la expresión:*

$$\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} b^{-2}} \cdot \left(a^{-\frac{5}{2}} b^{-4}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a^{-2} b^{-\frac{1}{3}}}.$$

Solución

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{b^2}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{b^4}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(a^{\frac{5}{2}} \cdot\ b^4\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^{\frac{1}{6}}} \\ &= \frac{1}{a^{\frac{7}{6}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot a^{\frac{5}{6}} \cdot\ b^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6 *Simplifique la expresión:*

$$\sqrt{\frac{3a^{-\frac{7}{2}}b^8}{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt[4]{4a^{-10}b^6}\cdot\frac{1}{a^{-\frac{3}{2}}b^3}}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{3b^8b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{2}}a^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{4b^6}{a^{10}}\cdot\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^3}}}\\
&= \sqrt{\frac{3b^{\frac{17}{2}}}{a^{\frac{25}{6}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{4b^3}{a^{\frac{17}{2}}}}}\\
&= \left[\frac{3b^{\frac{17}{2}}}{a^{\frac{25}{6}}}\cdot\left(\frac{4b^3}{a^{\frac{17}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{3^{\frac{1}{2}}b^{\frac{17}{4}}}{a^{\frac{25}{6}}}\cdot\left(\frac{4b^3}{a^{\frac{17}{2}}}\right)^{\frac{1}{8}}\\
&= \frac{3^{\frac{1}{2}}b^{\frac{17}{4}}}{a^{\frac{25}{6}}}\cdot\frac{4^{\frac{1}{8}}b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{17}{16}}}\\
&= \frac{3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}b^{\frac{37}{8}}}{a^{\frac{151}{48}}}\\
&= \frac{\sqrt[4]{18b^{37}}}{\sqrt[48]{a^{151}}}.
\end{aligned}$$

La sustitución de una expresión analítica por otra idénticamente igual a ella en cierto conjunto, lleva el nombre de transformación idéntica en este conjunto de la expresión dada.

Al realizar transformaciones idénticas de una expresión es posible la variación de su dominio.

La variación del dominio de la expresión es también posible como resultado de ciertas otras transformaciones, por lo que, después de efectuar la transformación de la expresión dada, siempre hay que saber responder a la pregunta en qué conjunto ella es idéntica a la obtenida.

Una expresión algebraica lleva el nombre de racional si ella sólo contiene operaciones de sumar, multiplicar, restar, dividir y elevación a una potencia entera.

4.2. Tarea

1. Simplifique la expresión:

   a) $\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}\right)^2\cdot\dfrac{(x-3)^2+12x}{2}$;

   b) $\dfrac{x^2}{x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

2. Demuestre que si $x+y+z=0$, entonces $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

3. Demuestre que si $x+y+z=0$, donde $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, entonces

$$\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{z}{x-y}+\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}\right)=9.$$

4. Simplifique las expresiones racionales:

a) $\dfrac{5x^2-x-4}{x^3-1}$; **d)** $\dfrac{x^4-x^2-12}{x^4+8x^2+15}$; **g)** $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$;

b) $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$; **e)** $\dfrac{2x^4+7x^2+6}{3x^4+3x^2-6}$; **h)** $\dfrac{2x^2+xy-y^2}{x+y}$;

c) $\dfrac{x^4+x^2-2}{x^6+8}$; **f)** $\dfrac{5x^4+5x^2-3x^2y-3y}{x^4+3x^2+2}$; **i)** $\dfrac{x^4-10x^2+169}{x^2+6x+13}$.

Resp: **a)** $\dfrac{5x+4}{x^2+x+1}$; **b)** $\dfrac{x^4+1}{x+1}$; **c)** $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x^3+4}$; **d)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+5}$;
e) $\dfrac{2x^2+3}{3x^2-3}$; **f)** $\dfrac{5x^2-3y}{x^2+2}$; **g)** $\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

5. Simplifique las expresiones racionales:

a) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4x^3}{1+x^4}-\dfrac{8x^7}{1+x^8}$;

b) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{1+x^{16}}$;

c) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$;

d) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2x^3}{x^4-1}$;

e) $\left(\dfrac{y}{x+y}+x\right)\left(\dfrac{x}{x-y}-y\right)-\left(\dfrac{x}{x+y}+y\right)\left(\dfrac{y}{x-y}-x\right)$;

f) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}\cdot\left(1+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)$;

g) $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$;

h) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{z+x}{(x-y)(y-z)}$;

i) $\dfrac{x-z}{x^2+xz+z^2}\cdot\dfrac{x^3-z^3}{x^2y-yz^2}\cdot\left(1+\dfrac{z}{x-z}-\dfrac{1+z}{z}\right)\div\dfrac{z(1+z)-x}{yz}$;

j) $\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}+\dfrac{1}{4y^2}}{x^2+2xy+2y^2}-\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}-\dfrac{1}{4y^2}}{x^2-2xy+2y^2}-\dfrac{1}{4y^2(x^2+2y^2)}+\dfrac{1}{4y^2(x^2-2y^2)}$;

k) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y-z}{y+z}+\dfrac{z-x}{z+x}+\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$;

l) $\dfrac{x^3y-xy^3+y^3z-yz^3+z^3x-zx^3}{x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2}$;

m) $\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$;

n) $\dfrac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z-x}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{x-y}{(z-x)(z-y)}$;

o) $\dfrac{x^2(u-y)(u-z)}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2(u-z)(u-x)}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2(u-x)(u-y)}{(z-x)(z-y)}$.

Resp: **a)** $\dfrac{16x^{15}}{1-x^{16}}$; **b)** $\dfrac{32}{1-x^{32}}$; **c)** $\dfrac{5}{x(x+5)}$; **d)** $\dfrac{x}{x^2-1}$; **e)** $2x$;
f) $\dfrac{(x+y+z)^2}{2yz}$; **g)** 0; **h)** 0; **i)** $\dfrac{1}{x+z}$; **j)** $\dfrac{2x^4}{x^8-16y^8}$; **k)** 0; **l)** $x+y+z$;
m) $(x+y)(y+z)(z+x)$; **n)** $\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{2}{y-z}+\dfrac{2}{z-x}$; **o)** u^2.

6. Demuestre que si x, y, $z\in\mathbb{R}$, de la igualdad

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2$$

se deduce que $a=b=c$.

7. Demuestre que con $x\in\mathbb{R}$, $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$ es un número positivo.

8. Encuentre el menor valor de la expresión $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$.

9. Demuestre que si $x+y+z=0$,

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

10. Demuestre que si $x+y+z=0$,

$$\frac{x^7+y^7+z^7}{7}=\frac{x^5+y^5+z^5}{5}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

11. Demuestre que si $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1$ y $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$, entonces

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=1.$$

12. Demuestre que si $\dfrac{x}{y-z}+\dfrac{y}{z-x}+\dfrac{z}{x-y}=0$, donde $x\neq y$, $x\neq z$, $y\neq z$, entonces

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}=0.$$

13. Demuestre que si $x+y+z=0$, entonces

$$x^5(y^2+z^2)+y^5(x^2+z^2)+z^5(y^2+x^2)=\frac{(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)}{2}.$$

14. Simplifique la expresión:

a) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)$;

b) $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$;

c) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}+2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)}{\left(\dfrac{ab-a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right)^{-1}}$;

d) $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$;

e) $\dfrac{1}{2}ab\sqrt{8a^3b}+\dfrac{1}{3}ab\sqrt{18ab^3}-a^2\sqrt{\dfrac{2b}{a}}-b^2\sqrt{\dfrac{2a}{b}}$;

f) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right)\div\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right)$;

g) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}\div\left(\dfrac{c^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{a^{-\frac{5}{6}}c^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}}\right)$;

h) $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-1}\right)^2\cdot\left(a^2b^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^2$;

i) $ab\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^2}}-ab\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}+\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{ab^4}-\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{a^4b}$;

j) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right)\div\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$;

k) $\left(\dfrac{a-4b}{a+\sqrt{ab}-6b}-\dfrac{a-9b}{a+6\sqrt{ab}+9b}\right)\cdot\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}$;

l) $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)\div\dfrac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$;

m) $\sqrt[6]{a}\left(\dfrac{3(a-b)}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{5}{6}}-a^{-\frac{1}{6}}b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)$;

n) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{6}}}\div\sqrt[4]{a^{-3}b^{-5}}\right)^{\frac{2}{7}}$;

o) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2b^2}+2a^{-1}b^{-1}}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{a+b+c}}\right)$.

4.3. Potencia con exponente entero

Anteriormente se definió la operación de elevación a potencia con exponente natural de cualquier número real. En esta sección se dan las definiciones de elevación de un número a potencia nula y a potencia con exponente negativo.

Definición 4.9 Potencia con exponente natural
Sean a un número real cualquiera y n, cualquier número natural. Entonces, se denomina potencia del número a con exponente natural n, un número que se escribe en la forma a^n y que se determina

como $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ veces}}$*, si* $n \geq 2$ *y* $a^n = a$*, si* $n = 1$*. Si* a *es un número cualquiera real distinto de cero. Se denomina potencia nula de este número la unidad, es decir* $a^0 = 1$ *para cualquier número real* a *distinto de cero.*

La potencia nula del número cero no está definida y el símbolo 0^0 se considera sin sentido.

Definición 4.10 Potencia con exponente negativo
Sea a *un número real cualquiera distinto de cero y* n*, cualquier número natural. Se llama potencia del número* a *con exponente negativo, el número* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *para cualquier número real* a*, distinto de cero, y para todo número entero negativo.*

La potencia entera negativa del número cero no está definida y el símbolo 0^{-n} se considera sin sentido.

Así pues, la potencia natural se determina para cualquier número real, mientras que la potencia nula y entera negativa se definen sólo para cualquier número real, distinto de cero.

Si a es un número real cualquiera distinto de cero, entonces se puede enunciar la definición de potencia con exponente entero, la cual representa la reunión de las definiciones anteriores.

Definición 4.11 Potencia con exponente entero
Sea a *un número real cualquiera distinto de cero y* k*, cualquier número entero; entonces, por número* a^k *se entiende aquel número que se determina como* $a^k = a$*, si* $k = 1$*;* $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{k \text{ veces}}$*, si* k *es un número natural* ≥ 2*;* $a^k = 1$*, si* $k = 0$*;* $a^k = \frac{1}{a^r}$*, si* k *es un número entero negativo. En este caso el número* a^k *se denomina potencia con exponente entero, el número* a *es la base de la potencia, el número* k*, el exponente de la potencia.*

La potencia par de un número positivo o negativo es un número positivo; la potencia impar de un número positivo es un número positivo, la potencia impar de un número negativo es un número negativo.

Sean a y b cualesquiera números reales distintos de cero, y sean n y m cualesquiera números enteros, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Teorema 4.1 *Sean* a *y* b *cualesquiera números reales distintos de cero, y sea* k *cualquier número entero, entonces:*

$$(ab)^k = a^k b^k.$$

Demostración
La validez de esta propiedad para k natural ($k = n$, $n \in \mathbb{N}$) se deduce de las leyes principales de adición y multiplicación de números reales:

$$\begin{aligned}
(ab)^k &= (ab)^n \\
&= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{n \text{ veces}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{n \text{ veces}} \\
&= a^n b^n \\
&= a^k b^k.
\end{aligned}$$

Sea $k = 0$,

$$\begin{aligned} (ab)^k &= (ab)^0 \\ &= 1 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= a^0 b^0 \\ &= a^k b^k. \end{aligned}$$

es decir,

$$(ab)^k = a^k b^k.$$

Supongamos que $k = -m$, y m es un número natural. Por definición de potencia con exponente negativo

$$\begin{aligned} (ab)^k &= (ab)^{-m} \\ &= \frac{1}{(ab)^m} \\ &= \frac{1}{a^m b^m} \\ &= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^m} \\ &= a^{-m} b^{-m} \\ &= a^k b^k. \end{aligned}$$

Teorema 4.2 *Sean a y b cualesquiera números reales distintos de cero, y sea k cualquier número entero, entonces:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}.$$

Teorema 4.3 *Sean a y b cualesquiera números reales distintos de cero, y sean k y r cualesquiera números enteros, entonces:*

$$a^k a^r = a^{k+r}.$$

Demostración
Con el fin de demostrar esta propiedad, examinemos cada uno de los seis casos posibles:
Caso 1. $k = n$, $r = m$: cuando $k = n$, $r = m$, la validez de esta propiedad, se desprende de las leyes principales de adición y multiplicación de los números reales:

$$\begin{aligned} a^k a^r &= a^n a^m \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ veces}} \\ &= a^{n+m} \\ &= a^{k+r}. \end{aligned}$$

Caso 2. $k = n$, $r = -m$: sea $k = n$, $r = -m$, donde n y m son números naturales; entonces, por definición de potencia con exponente entero negativo, tenemos

$$\begin{aligned} a^k a^r &= a^n \cdot \frac{1}{a^m} \\ &= \frac{a^n}{a^m}. \end{aligned}$$

Supongamos que $n > m$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{a^m} &= a^n a^{-m}\\ &= a^{n-m}\\ &= a^{n+(-m)}\\ &= a^{k+r}.\end{aligned}$$

Sea $n = m$, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{a^m} &= 1\\ &= a^0\\ &= a^{n+(-m)}\\ &= a^{k+r}.\end{aligned}$$

Sea $n < m$, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{a^m} &= \frac{1}{a^m \frac{1}{a^n}}\\ &= \frac{1}{a^m a^{-n}}\\ &= \frac{1}{a^{m-n}}\\ &= a^{-(m-n)}\\ &= a^{-m+n}\\ &= a^{n+(-m)}\\ &= a^{k+r}.\end{aligned}$$

Caso 3. $k = -n$, $r = m$: supongamos que $k = -n$, $r = m$, donde n y m son números naturales. Este caso es análogo al caso en que $k = n$, $r = -m$.
Caso 4. $k = -n$, $r = -m$, n, $m \in \mathbb{N}$: sea $k = -n$, $r = -m$, donde n y m son números naturales, entonces,

$$\begin{aligned}a^k a^r &= a^{-n} a^{-m}\\ &= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m}\\ &= \frac{1}{a^{m+n}}\\ &= a^{-(n+m)}\\ &= a^{-n-m}\\ &= a^{(-n)+(-m)}\\ &= a^{k+r}.\end{aligned}$$

Caso 5. $k \in \mathbb{Z}$, $r = 0$: sea k un número entero cualquiera y sea $r = 0$, entonces,

$$\begin{aligned}a^k a^r &= a^k \cdot 1\\ &= a^k\\ &= a^{k+0}\\ &= a^{k+r}.\end{aligned}$$

Caso 6. $k=0$, $r\in\mathbb{Z}$: supongamos que $k=0$ y r es un número entero cualquiera, entonces,

$$\begin{array}{rcl} a^k a^r & = & 1\cdot a^r \\ & = & a^r \\ & = & a^{0+r} \\ & = & a^{k+r}. \end{array}$$

Teorema 4.4 *Sean a y b cualesquiera números reales distintos de cero, y sean k y r cualesquiera números enteros, entonces:*

$$\frac{a^k}{a^r}=a^{k-r}.$$

Demostración
Para demostrar esta propiedad con k y r naturales ($k=n$, $r=m$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$), examinemos tres casos:
Caso 1. Si $n>m$, entonces $n=m+s$, donde $s\in\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} a^k : a^r & = & a^n : a^m \\ & = & \dfrac{a^n}{a^m} \\ & = & \dfrac{\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ veces}}\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{s \text{ veces}}}{\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ veces}}} \\ & = & a^s \\ & = & a^{n-m} \\ & = & a^{k-r}. \end{array}$$

Caso 2. Si $n=m$, entonces

$$\begin{array}{rcl} a^k : a^r & = & a^n : a^m \\ & = & \dfrac{a^n}{a^m} \\ & = & \dfrac{\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ veces}}}{\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ veces}}} \\ & = & 1. \end{array}$$

Por definición, $a^0=1$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} a^k : a^r & = & a^n : a^m \\ & = & a^0 \\ & = & a^{n-m} \\ & = & a^{k-r}. \end{array}$$

Caso 3. Si $m > n$, entonces $m = n + t$, donde $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a^k : a^r &= a^n : a^m \\
&= \frac{a^n}{a^m} \\
&= \frac{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}}}{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{t \text{ veces}}} \\
&= \frac{1}{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{t \text{ veces}}} \\
&= a^{-t} \\
&= a^{-(m-n)} \\
&= a^{n-m} \\
&= a^{k-r}.
\end{aligned}$$

Cabe señalar que en este caso $n - m$ no es un número natural.

Teorema 4.5 *Sea a cualquier número real distinto de cero, y sean k y r cualesquiera números enteros, entonces:*

$$(a^k)^r = a^{kr}.$$

Demostración
Con el objeto de demostrar esta propiedad, examinemos los seis casos posibles: Caso 1. Supongamos que $k = n$, $r = m$, donde n y m son números naturales:

$$\begin{aligned}
(a^k)^r &= (a^n)^m \\
&= \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot (a^n) \cdot \ldots \cdot (a^n)}_{m \text{ veces}} \\
&= \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \ldots \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nm \text{ veces}} \\
&= a^{nm} \\
&= a^{kr}.
\end{aligned}$$

Caso 2. Supongamos que $k = n$, $r = -m$, donde n y m son números naturales. Entonces:

$$\begin{aligned}
(a^k)^r &= (a^n)^{-m} \\
&= \frac{1}{(a^n)^m} \\
&= \frac{1}{a^{nm}} \\
&= a^{-nm} \\
&= a^{n(-m)} \\
&= a^{kr}.
\end{aligned}$$

Caso 3. Supongamos que $k = n$, $r = -m$, donde n y m son números naturales. La validez de esta propiedad se demuestra igual que en el caso de $k = n$, $r = -m$.
Caso 4. Supongamos que $k = -n$, $r = -m$, donde n y m son números naturales. Entonces:

$$\begin{aligned}
(a^k)^r &= (a^{-n})^{-m} \\
&= \frac{1}{(a^{-n})^m} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} \\
&= 1 \div \frac{1}{a^{nm}} \\
&= a^{nm} \\
&= a^{(-n)(-m)} \\
&= a^{kr}.
\end{aligned}$$

Caso 5. Supongamos que k es un número entero cualquiera y $r = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
(a^k)^r &= (a^k)^0 \\
&= 1 \\
&= a^0 \\
&= a^{k0} \\
&= a^{kr}.
\end{aligned}$$

Caso 6. Supongamos que $k = 0$ y r es un número entero cualquiera, entonces:

$$\begin{aligned}
(a^k)^r &= (a^0)^r \\
&= 1^r \\
&= 1 \\
&= a^0 \\
&= a^{0r} \\
&= a^{kr}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la propiedad queda demostrada.

Ejemplo 4.7 *Simplifique la expresión:*

$$\left[27^{10} - 5\left(\frac{1}{9}\right)^{-8} 3^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-8} 3^8\right] \div \left[41\left(3^{-2}\right)^{-12}\right].$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \left(27^{10} - 5 \cdot 9^8 3^{12} + 2^2 \cdot 3^{16} 3^8\right) : \left(41 \cdot 3^{24}\right) \\
&= \left(3^{30} - 5 \cdot 3^{28} + 2^2 \cdot 3^{24}\right) \div \left(41 \cdot 3^{24}\right) \\
&= \frac{3^{30} - 5 \cdot 3^{28} + 2^2 3^{24}}{41 \cdot 3^{24}} \\
&= \frac{3^{24}\left(3^6 - 5 \cdot 3^4 + 2^2\right)}{41 \cdot 3^{24}} \\
&= \frac{3^6 - 5 \cdot 3^4 + 2^2}{41} \\
&= \frac{729 - 405 + 4}{41} \\
&= \frac{328}{41} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8 *Simplifique la expresión:*

$$\frac{(-2) \cdot (-3)^{17} - (-3)^{16}}{9^7 \cdot 15}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2 \cdot 3^{17} - 3^{16}}{9^7 \cdot 15} \\
&= \frac{(2 \cdot 3 - 1)3^{16}}{(3^2)^7 \cdot 3 \cdot 5} \\
&= \frac{(6-1)3^{16}}{3^{14} \cdot 3 \cdot 5} \\
&= \frac{3^{16} \cdot 5}{3^{15} \cdot 5} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9 *Simplifique la expresión:*

$$\frac{8(4^2)^4 3^3 27^2 + 90 \cdot 6^3 4^7 (3^2)^2}{24(6^2)^4 (2^4)^2 + 144(2^3)^4 (9^2)^2 4^2}.$$

Solución

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2^3(2^4)^4 3^3(3^3)^2 + 3^2 5\cdot 2\cdot 3^3 2^3(2^2)^7 3^4}{3\cdot 2^3(3^2 2^2)^4 2^8 + 3^2 2^4 2^{12}(3^4)^2 2^4} \\
&= \frac{2^3 2^{16} 3^3 3^6 + 3^2 5\cdot 2\cdot 3^3 2^3 2^{14} 3^4}{3\cdot 2^3 3^8 2^8 2^8 + 3^2 2^4 2^{12} 3^8 2^4} \\
&= \frac{2^{19}3^9 + 3^9 5\cdot 2^{18}}{2^{19}3^9 + 3^{10}2^{20}} \\
&= \frac{2^{18}3^9(2+5)}{2^{19}3^9(1+3\cdot 2)} \\
&= \frac{7}{14} \\
&= \frac{1}{2}..
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.10 *Calcule el volumen V de un cubo de arista $\frac{3}{4}$ metros.*
Solución
El volumen V de un cubo de arista a es $V = a^3$. Tenemos que $a = \frac{3}{4}$ m, por lo tanto, el volumen del cubo es

$$
\begin{aligned}
V &= a^3 \\
&= \left(\frac{3}{4}\,m\right)^3 \\
&= \frac{27}{64}\,m^3.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.11 *Escriba con una ecuación La tercera ley de Kepler que enuncia: El cuadrado del periódo de revolución de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita del planeta.*
Solución
Si T es el periodo y a el semieje mayor, entonces

$$T^2 = ka^3$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 4.12 *La velocidad de luz es $v = 2,99\cdot 10^{10}\ \frac{cm}{seg}$. Calcule la distancia recorrida por la luz en un día y exprésela en notación científica.*
Solución
En un día hay 24 horas, en una hora 60 minutos y en un minuto 60 segundos. Por lo tanto, en un día hay $t = (24)(60)(60) = 86400$ segundos, es decir, $t = 8,6400\cdot 10^4$ segundos.
La distancia d se calcula con la fórmula $d = vt$. En este ejercicio,

$$d = \left(2,99\cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{seg}}\right)(8,64\cdot 10^4\text{seg})$$

con lo que,

$$
\begin{aligned}
d &= 25,8336\cdot 10^{14}\text{cm} \\
&= 2,58336\cdot 10^{15}\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.13 *El número de Avogadro $6,022\cdot 10^{23}$, es el número de moléculas contenidas en un mol. Si un mol de H_2O tiene 18 gr, calcule la masa de una molécula de agua.*

Solución

La masa de una molécula de agua es

$$\begin{aligned} m &= \frac{18}{6,022\cdot 10^{23}}\ \text{gr} \\ &= \frac{18}{6,022}\cdot 10^{-23}\ \text{gr} \\ &= 2,989\cdot 10^{-23}\ \text{gr.} \end{aligned}$$

4.4. Tarea

1. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{\frac14-1}{\frac18} - \left(-\dfrac12\right)^{-1} - \dfrac{\frac52-2}{\left(-\frac13\right)^2} - \dfrac{\frac34-\frac12-\frac18}{\frac52\left(-\frac1{25}\right)};$

b) $\dfrac{0,4\left(\frac12-1\right)+(1,2)^2}{0,5} + 2(-0,1)^2 - \dfrac{\left(\frac34-1\right)(-2)}{1-\frac12};$

c) $\left(\dfrac35-\dfrac23\right)^2 - \left(\dfrac12\right)^{-2} - \left(-\dfrac53\right)^{-1} \div 3 - 7\div\dfrac72 - (-3)^{-1};$

d) $\left(\sqrt{3-\dfrac23}\right)^6 - 4\div\dfrac1{12} + \dfrac13\cdot\dfrac65 + \left(-\dfrac34\right)^2\cdot\dfrac23;$

e) $\left(\dfrac{4}{-0,8-1,2}\right)^{-1} - \left[2(-0,1)+(1-0,5)^2\right]\div 0,1;$

f) $\left(\sqrt2\right)^4\left[\left(2\dfrac12\right)^3\div\left(\dfrac23\right)^2\right]\div\left[(0,1)^2\left(\dfrac52\right)^{-3}\right];$

g) $\dfrac{8\cdot\left(4^2\right)^4\cdot 3^3\cdot 27^2+90\cdot6^3\cdot4^7\cdot\left(3^2\right)^2}{24\cdot\left(6^2\right)^4\cdot\left(2^4\right)^2+144\cdot\left(2^3\right)^4\cdot\left(9^2\right)^2\cdot4^2}.$

2. Simplifique las expresiones:

a) $\left[\left(10^{-6}\right)^{-2}+5^3\cdot25^4\cdot2^3\cdot\left(2^3\right)^2-5^{13}\cdot\left(4^2\right)^2\right]\div\left[\left(5^{-5}\right)^{-1}\left(\frac12\right)^{-2}10^5\right];$

b) $\left[9\left(\frac12\right)^{-2}18^2-\left(2^{-2}\right)^{-2}\left(\frac1{3^2}\right)^{-5}-\left(3^{-3}\right)^{-2}\left(\frac16\right)^{-6}\right]\left[\left(\frac12\right)4\right]^{-1}\left(3^2\right)^4;$

c) $\left(\frac23+\frac56-\frac29\right)\div\left(-\frac29\right)-\frac94\left(-\frac29\right)+\left(-\frac23\right)(-3)^3-\left(5-\frac23\right)\div\left(-\frac13\right);$

d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{\frac34+1}\right)^6+\left[\left(\sqrt[3]{\frac85-2}\right)^{-3}\right]^{-1}-(-2)^{-2}+\frac34}{\left(-\frac12\right)^{-2}(-2)^{-3}(-3)^2+(-2)\div\frac43-(-1)^{-2}-\left(1+\frac12\right)^{-1}};$

e) $(-3)^{-1}-(-1)^{-3}-\left(1-\frac12\right)^{-2}+\left(5\div\frac56\right)^{-1}-\left(-1-\frac15\right)^{-1}.$

3. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{0,2^2\cdot1,5+0,1\cdot0,4-0,2}{(1-0,6)\cdot0,02};$

b) $\dfrac{\frac{1-0,5^2}{0,125}-2}{(0,6-0,5)^2};$

c) $\left[\dfrac{-0,8}{-0,8+1}\cdot\left(0,5-\dfrac{0,7}{2}\right)\right]^{-2}\cdot(-0,3)^2;$

d) $\dfrac{(1-0,5)^2\div 0,25+0,75}{0,5\cdot(1-0,25)}\cdot 0,3;$

e) $\dfrac{(0,5-0,6)\div 0,1}{(0,5-1)^2};$

f) $\dfrac{2}{\left(\dfrac{0,9-1}{3}\right)^2}+\dfrac{(0,5-1)^2}{0,5}+5\cdot(-0,1);$

g) $\dfrac{(0,5\cdot 0,1-1,55)^2}{0,75-1}.$

4.5. Potencia con exponente racional

Definición 4.12 Raíz aritmética de n-ésimo grado
Sea n un número natural y a, un número positivo. Entonces el número positivo b tal, que $b^n=a$ lleva el nombre de raíz aritmética de n-ésimo grado del número a y se designa $b=\sqrt[n]{a}$.

De esta definición resulta válida la siguiente afirmación:

$$\sqrt[n]{a}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} a\ \text{ es un número positivo}\\ n\ \text{ es un número natural}\\ \sqrt[n]{a}\ \text{ es un número positivo}\\ (\sqrt[n]{a})^n=a.\end{cases}$$

Para todo número positivo a existe una, y sólo una, raíz aritmética de n-ésimo grado.

A continuación damos a conocer la definición de elevación de un número entero a una potencia con exponente racional aprovechando con este fin la definición de elevación a potencia entera y la definición de raíz aritmética de un número positivo.

Definición 4.13 r-ésima potencia
Sea a un número positivo y $r=\frac{p}{q}$, un número racional, con la particularidad de que q es un número natural mayor que cero. El número positivo b tal, que $b=\sqrt[q]{a^q}$ lleva el nombre de r-ésima potencia del número a y se denota $b=a^r$, es decir $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$.

Supongamos que a y b son cualesquiera números positivos y k, t, cualesquiera números racionales. Resultan válidas las siguientes propiedades, llamadas propiedades de las potencias con exponentes racionales.

Teorema 4.6 *Al elevar a potencia un producto, se puede elevar a esa potencia cada uno de los factores y multiplicar los resultados obtenidos:*

$$(ab)^k=a^kb^k.$$

Demostración
Sea $k=\frac{p}{q}$ donde q es un número natural, entonces:

$$\begin{aligned}\left((ab)^{\frac{p}{q}}\right)^q &= \left(\sqrt[q]{(ab)^p}\right)^q\\ &= (ab)^p\\ &= a^pb^p\\ &= \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\left(\sqrt[q]{b^p}\right)^q\\ &= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q\\ &= \left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}\right)^q\end{aligned}$$

Así pues, $((ab)^k)^q = (a^k b^k)^q$, esta igualdad es equivalente a la igualdad $(ab)^k = a^k b^k$.

Teorema 4.7 *Si se eleva a potencia una fracción, se pueden elevar a esta potencia el numerador y el denominador de la fracción por separado y dividir el primer resultado por el segundo:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$$

Teorema 4.8 *Al multiplicar potencias de bases iguales se suman los exponentes:*

$$a^k a^t = a^{k+t}.$$

Demostración
Supongamos que $k = \frac{p}{q}$, $t = \frac{m}{n}$. Entonces $a^k a^t = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\left(a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn} &= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn} \\
&= \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)^n \left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)^q \\
&= \left(\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right)^n \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^q \\
&= (a^p)^n (a^m)^q \\
&= a^{pn} a^{mq} \\
&= a^{pn+mq} \\
&= \left(\sqrt[nq]{a^{pn+mq}}\right)^{nq} \\
&= \left(a^{\frac{pn+mq}{nq}}\right)^{nq}
\end{aligned}$$

Así pues, tomando en consideración que

$$\frac{pn + mq}{nq} = k + t$$

tenemos $(a^k a^t)^{qn} = (a^{k+t})^{qn}$, esta igualdad es equivalente a la igualdad $a^k a^t = a^{k+t}$.

Teorema 4.9 *Al dividir potencias de bases iguales se restan los exponentes:*

$$\frac{a^k}{a^t} = a^{k-t}.$$

Teorema 4.10 *Si se eleva a potencia una potencia, los exponentes se multiplican:*

$$(a^k)^t = a^{kt}.$$

Demostración

Supongamos que $k = \frac{p}{q}$, $t = \frac{m}{n}$, entonces $(a^k)^t = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
\left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right)^{nq} &= \left(\left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right)^{n}\right)^{q} \\
&= \left(\left(\sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{m}}\right)^{n}\right)^{q} \\
&= \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{m}\right)^{q} \\
&= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq} \\
&= \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right)^{m} \\
&= \left(\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{q}\right)^{m} \\
&= (a^p)^m \\
&= a^{pm} \\
&= \left(\sqrt[pn]{a^{pm}}\right)^{qn} \\
&= \left(a^{\frac{pm}{qn}}\right)^{qn}
\end{aligned}
$$

Así pues, $((a^k)^t)^{nq} = (a^{kt})^{nq}$, la validez de esta igualdad predetermina la validez del teorema.

Teorema 4.11 *Supongamos que a es un número positivo, $k = \frac{p}{q}$ un número racional, mientras que q y n son números naturales. En este caso*

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}.$$

Demostración
Por tanto

$$
\begin{aligned}
\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} &= \left(\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right)^{n} \\
&= \left(\sqrt[q]{(a^p)^q}\right)^{n} \\
&= (a^p)^n \\
&= a^{pn} \\
&= \left(\sqrt[qn]{a^{pn}}\right)^{qn} \\
&= \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}
\end{aligned}
$$

Así pues, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} = \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$, de donde precisamente proviene la validez de esta propiedad.

Para las raíces aritméticas, las propiedades demostradas anteriormente se expresan de la siguiente manera:

1) Al extraer la raíz de un producto se puede extraer la raíz de igual exponente de cada factor y multiplicar los resultados obtenidos, es decir

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

2) Para extraer la raíz de una fracción, se puede extraer la raíz, de igual exponente, del numerador y denominador por separado y dividir el primer resultado para el segundo, es decir

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$;
5) Al elevar a potencia una raíz se puede elevar a esa potencia el número subradical sin variar el índice de la raíz. Además al extraer la raíz de una potencia se puede dividir el exponente del radicando por el índice de la raíz, si esa división se cumple enteramente, es decir

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

6) Al extraer la raíz de una raíz se puede extraer la raíz de grado igual al producto de los índices de las dos raíces, permaneciendo el resultado sin variación, es decir

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

7) El índice de la raíz y el exponente del radicando se pueden dividir por su factor común, es decir

$$\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

Se denomina radical doble, a una expresión de la forma

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

Todo radical doble se puede descomponer en la suma o diferencia de dos radicales simples. En general:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

De donde se deduce que

$$\begin{cases} \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} & \text{(I)} \\ \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} & \text{(II)} \end{cases}$$

Para calcular x y y, procedemos de la siguiente manera:

1) Sumando (I) + (II):

$$2\sqrt{x} = \sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Elevando al cuadrado:

$$4x = A + \sqrt{B} + 2\sqrt{A+\sqrt{B}}\sqrt{A-\sqrt{B}} + A - \sqrt{B}$$

$$x = \frac{2A + 2\sqrt{A^2 - B}}{4} = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

haciendo $C = \sqrt{A^2 - B}$, entonces

$$x = \frac{A + C}{2}$$

2) Restando (I) - (II):

$$2\sqrt{y} = \sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Elevando al cuadrado:

$$4y = A + \sqrt{B} - 2\sqrt{A+\sqrt{B}}\sqrt{A-\sqrt{B}} + A - \sqrt{B}$$

$$y = \frac{2A - 2\sqrt{A^2-B}}{4} = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

haciendo $C = \sqrt{A^2-B}$, entonces

$$x = \frac{A-C}{2}$$

Sustituyendo los valores de x y y en (I) y (II):

$$\begin{cases} \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \\ \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \end{cases}$$

Es decir que, para transformar raíces dobles, en raíces simples, $A^2 - B$ debe ser un número cuadrado perfecto.çç

Un radical de la forma

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}$$

se puede descomponer en radicales simples de la siguiente manera:
Sea

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

el objetivo es calcular x, y y z en funci'on de los valores conocidos A, B, C y D. Se procede elevando al cuadrado la expresión

$$\left(\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$$

$$A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

identificando los términos racionales e irracionales, tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = A & (1) \\ 2\sqrt{xy} = \sqrt{B} & (2) \\ 2\sqrt{xz} = \sqrt{C} & (3) \\ 2\sqrt{yz} = \sqrt{D} & (4) \end{cases}$$

que es un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Resolviendo en el sistema conformado por las ecuaciones (2), (3) y (4) se obtiene x, y y z. La ecuación (1) es la ecuación de comprobación de los valores obtenidos.

Un radical de la forma

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}$$

en este caso, los radicales simples deben llevar algún signo negativo:
Sea

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$$

Elevamos al cuadrado la expresión

$$\left(\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2$$

$$A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$$

identificando los términos racionales e irracionales, tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=A & (1)\\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{B} & (2)\\ 2\sqrt{xz}=\sqrt{C} & (3)\\ 2\sqrt{yz}=\sqrt{D} & (4)\end{cases}$$

que es un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Resolviendo en el sistema conformado por las ecuaciones (2), (3) y (4) se obtiene x, y y z. La ecuación (1) es la ecuación de comprobación de los valores obtenidos.

El radical de la forma

$$\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$$

se puede descomponer en radicales simples, de la siguiente manera:

1) $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$:
Haciendo

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}$$

elevando al cubo

$$\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)^3=\left(x+\sqrt{y}\right)^3$$

$$\begin{aligned} A+\sqrt{B} &= x^3+3x^2\sqrt{y}+3x\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^3\\ &= x^3+3xy+3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}\end{aligned}$$

igualando las partes racionales e irracionales

$$\begin{cases} A=x^3+3xy & (1)\\ \sqrt{B}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y} & (2)\end{cases}$$

Restando (1) - (2) y ordenando

$$\begin{aligned} A-\sqrt{B} &= x^3+3x^2\sqrt{y}+3x\left(\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^3\\ &= \left(x-\sqrt{y}\right)^3\end{aligned}$$

extrayendo la raíz cúbica queda demostrado que

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}$$

donde, conocidos los valores de A y B se debe calcular x e y en función de los anteriores.

2) $\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$:
Como

$$\begin{cases} \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = x+\sqrt{y} & (1) \\ \sqrt[3]{A-\sqrt{B}} = x-\sqrt{y} & (2) \end{cases}$$

Multiplicando (1) y (2)

$$\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B})} = (x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$$

$$\sqrt[3]{A^2-B} = x^2-y$$

haciendo $C=\sqrt[3]{A^2-B}$ se tendrá

$$C = x^2-y \qquad \Rightarrow \qquad y = x^2 - C \qquad (3)$$

De (1) se sabe que

$$A = x^3+3xy$$

sustituyendo el valor de y

$$A = x^3+3x(x^2-C) = 4x^3-3xC \qquad (4)$$

de donde por tanteos, se encuentra el valor de x que sustituyendo en (3) da el valor de y.

Ejemplo 4.14 *Simplifique la expresión:*

$$3\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} + \sqrt{150}.$$

Solución
Simplificamos la expresión:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3^2\cdot\frac{2}{3}} - \sqrt{2^2\cdot\frac{3}{2}} + \sqrt{6} + \sqrt{25\cdot 6} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{6}+5\sqrt{6} \\ &= 6\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.15 *Simplifique la expresión:*

$$2\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}.$$

Solución
Simplificamos la expresión:

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{20\sqrt{3}} + 6\sqrt{10\sqrt{12}} - 2\sqrt{45\sqrt{3}} \\ &= 4\sqrt{5\sqrt{3}} + 6\sqrt{20\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} \\ &= 4\sqrt{5\sqrt{3}} + 12\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} \\ &= 10\sqrt{5\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.16 *Simplifique la expresión:*

$$15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-5\sqrt{0{,}02}+\sqrt{300}.$$

Solución
Simplificamos la expresión:

$$\begin{aligned}
A &= 15\sqrt{\frac{26}{25}}-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{50}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-5\sqrt{\frac{1}{50}}+\sqrt{300}\\
&= 15\cdot\frac{1}{5}\sqrt{26}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\sqrt{2}+6\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}-5\cdot\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}+10\sqrt{3}\\
&= 3\sqrt{26}-\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+10\sqrt{3}\\
&= 3\sqrt{26}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+10\sqrt{3}\\
&= 3\sqrt{26}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+10\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.17 *Simplifique la expresión:*

$$30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}.$$

Solución
Simplificamos la expresión:

$$\begin{aligned}
A &= 30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{2^3\cdot 18}\\
&= 30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+10\sqrt[3]{18}\\
&= 30\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{12}}}+\frac{7}{2}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}+10\sqrt[3]{18}\\
&= \frac{60+7\sqrt[3]{8}+20\sqrt[3]{216}}{2\sqrt[3]{12}}\\
&= \frac{60+7\sqrt[3]{2^3}+20\sqrt[3]{6^3}}{2\sqrt[3]{12}}\\
&= \frac{60+14+120}{2\sqrt[3]{12}}\\
&= \frac{97}{\sqrt[3]{12}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.18 *Simplifique la expresión:*

$$\left[\left(2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}\right):4^{\frac{1}{6}}\right]:\left\{\left[4^{-\frac{1}{2}}:\left(2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{1}{3}}\right)\right]\left[\left(2^{-\frac{5}{6}}4^{-\frac{2}{3}}\right):3^{\frac{5}{6}}\right]\right\}.$$

Solución

Simplificamos la expresión:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{6}}}\right):\left\{\left[\frac{1}{2}:\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}}\right]\left[\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}4^{\frac{2}{3}}}:3^{\frac{5}{6}}\right]\right\}\\
&= \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right):\left\{\left[\frac{1}{2}:\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}}\right]\left[\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}2^{\frac{4}{3}}}:3^{\frac{5}{6}}\right]\right\}\\
&= 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}:\left\{\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{13}{6}}\cdot 3^{\frac{5}{6}}}\right\}\\
&= 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}:\left\{\frac{1}{2^{\frac{17}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\right\}\\
&= 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{17}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\\
&= 2^{3}\cdot 3\\
&= 24.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.19 *Simplifique la expresión:*

$$\left\{\left[\left(3^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right):\left(3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right)\right]:\left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}.$$

Solución
Simplificamos la expresión:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}}:\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}2^{\frac{5}{6}}}\right]:\left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}\\
&= \left\{\frac{3^{\frac{3}{4}}2^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}}:\left(\frac{1}{27\cdot 32}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}\\
&= \left(\frac{3^{\frac{3}{4}}2^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{2}{7}}:\left(\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}2^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{2}{7}}\\
&= \left(3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{7}}\cdot 3^{\frac{3}{14}}\cdot 2^{\frac{5}{14}}\\
&= 3^{\frac{1}{14}}\cdot 2^{\frac{1}{7}}\cdot 3^{\frac{3}{14}}\cdot 2^{\frac{5}{14}}\\
&= 3^{\frac{2}{7}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.20 *Simplifique la expresión:*

$$\left\{3^{\frac{5}{2}}5^{\frac{4}{3}}2^{\frac{5}{4}}\left[16:\left(27^{-1}5^{-\frac{5}{3}}\right)\right]\left(25\cdot 3^{\frac{1}{2}}:2^{\frac{1}{4}}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$$

Solución

Simplificamos la expresión:

$$\begin{aligned}
A &= \left\{3^{\frac{5}{2}}5^{\frac{4}{3}}2^{\frac{5}{4}}\left[16:\frac{1}{27\cdot 5^{\frac{5}{3}}}\right]\left(\frac{25\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)\right\}^{\frac{1}{5}} \\
&= \left\{3^{\frac{5}{2}}5^{\frac{4}{3}}2^{\frac{5}{4}}\left[16\cdot 27\cdot 5^{\frac{5}{3}}\right]\left(\frac{5^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)\right\}^{\frac{1}{5}} \\
&= \left(\frac{3^{\frac{5}{2}}5^{\frac{4}{3}}2^{\frac{5}{4}}\cdot 16\cdot 27\cdot 5^{\frac{5}{3}}5^2 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{4}{15}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{20}}} \\
&= 3^{\frac{6}{5}}\cdot 5\cdot 2 \\
&= 3^{\frac{1}{5}}\cdot 30.
\end{aligned}$$

A continuación estudiaremos las propiedades principales del tipo de desigualdades para la potencia con exponente racional:

Teorema 4.12 *Supongamos que $a > 1$ y $r = \frac{p}{q}$ es número racional positivo $p > 0$, $q > 0$. Entonces, $a^r > 1$.*

Demostración

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p$$

Las condiciones $a > 1$ y $a^p > 1^p$ son equivalentes, quiere decir, de la condición $a > 1$ se desprende que $a^p > 1$, mas, en este caso, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q > 1^q$, es decir, $(a^r)^q > 1^q$, de lo cual, según la misma propiedad, resulta que $a^r > 1$.

Teorema 4.13 *Sea $0 < a < k$, y $r = \frac{p}{q}$ un número racional positivo $p > 0$, $q > 0$. Entonces, $a^r < 1$.*

Teorema 4.14 *Supongamos que $a > 1$ y k, t son números racionales tales que $k > t$. Entonces, $a^k > a^t$.*

Demostración

Por cuanto $k - t$ es un número racional positivo, entonces, conforma a la propiedad 1, $a^{k-t} > 1$. Al multiplicar esta desigualdad por el número positivo a^t, obtenemos $a^t(a^{k-t}) > a^t$. De aquí que $a^k > a^t$, es decir esta propiedad queda demostrada.

Teorema 4.15 *Supongamos que $0 < a < 1$, y sean k y t números racionales tales, que $k > t$. Entonces, $a^k < a^t$.*

La operación inversa a la potenciación se denomina radicación; mediante esta operación, si están dados la potencia y su exponente, se busca la base de la potencia. La operación de radicación o extracción de raíz, se fija con el signo $\sqrt{\ }$; además, sobre este signo se escribe el índice de la raíz y sólo en el caso de la raíz cuadrada el índice de raíz.

Extraer la raíz n-ésima del número a significa hallar un número x tal, que después de elevar a la potencia n obtenemos el mismo número a, es decir $\sqrt[n]{a} = x$, si $x^n = a$.

Ejemplo 4.21 *Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.*
Solución
Si $x \in \mathbb{R}$ y $x^2 = 2$, entonces x no es racional. La propiedad de ser irracional es un tipo de propiedad negativa y no es fácil de verificar directamente. Sin embargo, podemos demostrar que x racional junto con $x^2 = 2$ conduce a una contradicción. Demostremos que $\sqrt{2}$ es irracional por contradicción. Supongamos que $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 2$ y x es racional. Por definición de número racional tenemos que $x = \dfrac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Reduciendo la fracción cuanto sea necesario podemos suponer que p y q no tienen factores comunes. En particular p y q no pueden ser ambos pares. Como $2 = x^2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ tenemos $p^2 = 2q^2$ y por lo tanto p^2 es par. Esto implica que p es par. Entonces $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $(2k)^2 = 2q^2$ y por lo tanto $q^2 = 2k^2$. Así q^2 y q son también pares. Pero entonces p y q son ambos pares contradiciendo lo que inicialmente se estableció. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional.

Ejemplo 4.22 *Demuestre que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es un número irracional.*
Solución
Suponga que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, entonces $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ es el cociente de dos números racionales, de donde el número $\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} \in \mathbb{Q}$, lo que contradice la naturaleza irracional de $\sqrt{2}$. Por lo tanto, la suposición es falsa y el número $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es irracional.

Ejemplo 4.23 *Demuéstrese que para cualesquiera números positivos a y b se verifica la desigualdad*
$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > (a+b)^{\frac{2}{3}}.$$

Solución
Denotemos $a+b$ con c y examinemos las fracciones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$. Por cuanto $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, entonces $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$. De aquí que
$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1, \qquad \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1,$$
es decir
$$\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1, \qquad \left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1.$$
Por consiguiente
$$\frac{a}{c} < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} < \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}.$$
De acuerdo con la propiedad de las desigualdades numéricas se verifica también la desigualdad
$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$
de donde, teniendo en cuenta que $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, llegamos a que se verifica la desigualdad
$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > 1.$$
Teniendo en cuenta que c es un número positivo y multiplicando esta desigualdad por c2/3, concluimos que se verifica la desigualdad
$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}.$$

La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores reales inversas. La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el número subradical. La raíz de índice par de un número negativo no es un número real. Tales raíces se denominan números imaginarios.

Definición 4.14 Valor aritmético de la raíz
El valor no negativo de la raíz de índice par de un número no negativo se denomina valor aritmético de la raíz.

Cuando hay que calcular aproximadamente la magnitud numérica de una fracción, que contiene en el denominador un radical, frecuentemente se hace necesario dividir por un número de muchas cifras, lo que es incómodo. Sin embargo, la fracción dada se puede transformar de manera que el denominador se convierta en un número racional. Esta transformación se denomina, racionalización de denominadores.

Definición 4.15 Radicales semejantes
Dos o varios radicales se denominan semejantes, si se diferencian sólo por los coeficientes, pero tienen idénticas expresiones subradicales e iguales índices del radical o no difieren en nada.

Frecuentemente los radicales aparentan ser no semejantes; sin embargo, después de reducirlos a la forma elemental se puede descubrir su semejanza. Los radicales semejantes se reducen del mismo modo que los monomios racionales semejantes.

Al sumar o restar radicales se relacionan entre sí con el signo más o menos y se reducen a radicales semejantes, si éstos existen.

Al multiplicar y dividir polinomios irracionales se utilizan las mismas reglas que al multiplicar y dividir polinomios racionales.

Ejemplo 4.24 *Simplifique la expresión:*

$$\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \frac{9\left(5+\sqrt{7}\right)}{\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)}+\frac{22\left(7-\sqrt{5}\right)}{\left(7+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}\\
&= \frac{9\left(5+\sqrt{7}\right)}{25-7}+\frac{22\left(7-\sqrt{5}\right)}{49-5}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}\\
&= \frac{9\left(5+\sqrt{7}\right)}{18}+\frac{22\left(7-\sqrt{5}\right)}{44}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\\
&= \frac{5+\sqrt{7}}{2}+\frac{7-\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\\
&= \frac{5+\sqrt{7}+7-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\\
&= 6.
\end{aligned}$$

4.6. Tarea

1. Simplifique la expresión:
   a) $\sqrt{18\left(4-\sqrt{17}\right)^2}$; **b)** $\sqrt{54\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$; **c)** $\sqrt[4]{48\left(2-\sqrt{7}\right)^4}$; **d)** $\sqrt[4]{2\left(\sqrt{11}-3\right)^4}$.

2. Simplifique la expresión:

a) $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$; **b)** $2\sqrt[3]{0,125}+\sqrt[4]{0,0016}$; **c)** $\sqrt[4]{0,0001}-\sqrt[5]{0,00032}$.

3. Simplifique la expresión:

a) $3\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{5}{6}\sqrt{27}-0,1\sqrt{75}+2\sqrt{\frac{1}{3}}$; **b)** $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$;

c) $\left(\sqrt{6}-2\sqrt{15}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{20}$.

4. Simplifique la expresión:

a) $2\left(\sqrt{252}-\sqrt{175}\right)-\left(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28}\right)$;

b) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+2\sqrt{75}+3\sqrt{108}$;

c) $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$;

d) $15\sqrt{1,04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-\left(5\sqrt{0,02}-\sqrt{300}\right)$.

5. Expresar cada uno de los cocientes, en la forma $a+b\sqrt{c}$:

a) $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$;

b) $\dfrac{-2-3\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}$;

c) $\dfrac{\left(\sqrt{6}-3\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$;

d) $\dfrac{2\sqrt{6}-8+3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{6}+\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$;

e) $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;

f) $\dfrac{1-\sqrt{6}}{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}$;

g) $\dfrac{\left(\sqrt{8}-1\right)^3\left(2\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^4}{9\left(\sqrt{8}+1\right)^5}$;

h) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}$.

6. Simplifique la expresión:

a) $\sqrt{12+\sqrt{140}}-\sqrt{8+\sqrt{28}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{9+5\sqrt{3}-\sqrt{3(\sqrt{3}+2)+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}}$;

c) $\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+...+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}}}$;

d) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{56+40\sqrt{2}}-\sqrt{34+26\sqrt{2}}+\sqrt{23+37\sqrt{2}}\right)$;

e) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}-\dfrac{\sqrt{c-\sqrt{c^2-d^2}}}{\sqrt{c+d}-\sqrt{c-d}}$;

f) $\dfrac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{-2+2\sqrt{2x^2+2x+2\sqrt{x^4+2x^3-2x-1}}}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{9-4\sqrt{2}}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{12+8\sqrt{2}}}{\sqrt{15-10\sqrt{2}}+\sqrt{13+4\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}}$;

h) $\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}$;

i) $\sqrt{24+4\sqrt{15}+4\sqrt{21}+2\sqrt{35}}$;

j) $\sqrt{a+3b+4+4\sqrt{a}+4\sqrt{3b}+2\sqrt{3ab}}$;

k) $\sqrt{14+2\sqrt{10}-2\sqrt{14}-2\sqrt{35}}$;

l) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$;

m) $\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$;

n) $\sqrt[3]{14\sqrt{5}+18\sqrt{3}}$;

o) $\dfrac{42x^2-9x^3-10\sqrt{42x^2-9x^3-24}}{\sqrt{42x^2-9x^3-24}-6}$;

p) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}}$;

q) $\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\sqrt{\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}}$;

r) $\sqrt{a+5b+3\sqrt{2ab+b^2}}-\sqrt{a+\sqrt{2ab+b^2}+b}$;

s) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{\sqrt{6+4\sqrt{2}}+7-\sqrt{2}}}}}$;

t) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$.

Resp: **a)** 0; **b)** 2; **c)** $1+\sqrt{2}$; **d)** 7; **e)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **f)** 1; **g)** 3;
h) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **i)** $2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$; **j)** $2+\sqrt{a}+\sqrt{3b}$; **k)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$;
l) $1+\sqrt{2}$; **m)** $3-\sqrt{3}$; **n)** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **o)** $\sqrt{42x^2-9x^3-24}-4$; **p)** 1; **q)** 2;
r) $\sqrt{2b}$; **s)** 3; **t)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Transformar a radicales simples la expresión:

a) $\sqrt{5x-2+2\sqrt{6x^2-7x-3}}$;

b) $\sqrt{7x+16y+4+2\sqrt{21xy+39y^2+56x+92y-32}}$;

c) $\sqrt{5x-2+\sqrt{24x^2-14x-5}}$;

d) $\sqrt{x+\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-\dfrac{1}{4}}}$;

e) $\sqrt{a+b+c+\sqrt{c(2a+2b+c)}}-\sqrt{a+b+c-\sqrt{c(2a+2b+c)}}$.

Resp: **a)** $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-3}$; **b)** $\sqrt{7x+13y-4}+\sqrt{3y+8}$; **c)** $\sqrt{\frac{6x-5}{2}}+\sqrt{\frac{4x+1}{2}}$;
d) $\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{x-\frac{1}{8}}$; **e)** $\sqrt{2c}$.

8. Simplifique la expresión:

a) $\sqrt[m]{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[2m]{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4m]{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[8m]{3+\sqrt{8}}$;

b) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[8]{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[12]{5\sqrt{2}-7}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}-\sqrt{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}}$;

d) $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}+\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}}+\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}-\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}+\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}}+\sqrt{\frac{3\sqrt[4]{a}}{2}-\sqrt{\frac{9\sqrt{a}}{4}-1}}}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{6ny}}{\sqrt{(\sqrt{an}+\sqrt{ny})(\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny})}-\sqrt{(\sqrt{an}-\sqrt{ny})(\sqrt{ax}+\sqrt{ax-ny})}}$;

f) $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}}{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)}+\sqrt{(a-b)(c-a)}+\sqrt{(b-c)(c-a)}}}$;

g) $\dfrac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(6+\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(6-\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}}$;

h) $\dfrac{\sqrt{26+\sqrt{675}}-\sqrt{26-\sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}+\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}}$;

i) $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

j) $\dfrac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$;

k) $\left(\dfrac{5}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}-\dfrac{5}{\sqrt{5-\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{2}}}\right)^2+2\sqrt{23}$;

l) $\sqrt{10-\sqrt{4-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}}$;

m) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9+2\sqrt{18}}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$;

n) $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\sqrt{5}$;

o) $\dfrac{48}{\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{35}-\sqrt[3]{5}}$;

p) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-2}$;

q) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}-\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}}+\sqrt[3]{2}$;

r) $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$;

s) $\dfrac{(x-1)\left(1+x-\sqrt[3]{x^2}\right)}{1+\sqrt[3]{x}+x\sqrt[3]{x^2}}$;

t) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$.

Resp: **a)** 1; **b)** 1; **c)** $x+1$; **d)** $\sqrt[3]{3}$; **e)** $\sqrt{3}$; **f)** $\sqrt{2}$; **g)** $\frac{7}{13}$; **h)** $\frac{5\sqrt{2}}{4}$;
i) -1; **j)** $\frac{x+1}{x-1}$; **k)** 10; **l)** 3; **m)** 0; **n)** 3;
o) $\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)$; **p)** $-1-\sqrt[3]{2}$; **q)** 0; **r)** $2+2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}$;
s) $\sqrt[3]{x}-1$; **t)** $\frac{1}{2}(\sqrt[6]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$.

9. Simplifique la expresión:

a) $\dfrac{20}{7+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$; **b)** $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; **c)** $\sqrt[3]{20\sqrt{2}+12\sqrt{6}}+\sqrt[3]{20\sqrt{2}-12\sqrt{6}}$.

Resp: **a)** $7+\sqrt{6}-\sqrt{21}-\sqrt{14}$; **b)** $\sqrt{3}-1$; **c)** $2\sqrt{2}$.

10. Simplifique la expresión:

a) $2\sqrt{12}-4\sqrt{27}+4\sqrt{24}$;
b) $-6\sqrt[3]{54}+10\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{150}$;
c) $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}$;
d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)$;
e) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}$;
f) $\sqrt{\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}\div\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2$.

11. Simplifique la expresión:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$;
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;
c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;
d) $\dfrac{12}{\sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{35}-\sqrt{14}}$;
e) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}-1}+\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$;
f) $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$;
g) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;
h) $\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}-\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}$.

12. Simplifique la expresión:

a) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\div\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}}$;
b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$;
c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;
d) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}}+\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{3}}-\dfrac{\sqrt[4]{160}}{\sqrt[4]{5}}$.

13. Expresar cada uno de los cocientes, en la forma $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$:

a) $\dfrac{1+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{3-\sqrt[3]{4}}$;
b) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}$;
c) $\dfrac{5-4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}{1+2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4}}$;
d) $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}$;
e) $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$;
f) $\dfrac{1-\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}{1-2\sqrt[3]{2}}$;
g) $\dfrac{3+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-1}$;
h) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}}$.

4.7. Potencia de un número positivo

Todo lo analizado anteriormente, permite dar la definición de potencia real de un número positivo. Obsérvese que el número a^k existe y, además, es único para cualquier número real k.

Definición 4.16 Potencia de un número positivo
Sean dados un número positivo a y un número real k. Por número a se entiende un número positivo que se determina según la siguiente regla:
1.- *Si $k > 0$:*
a) *$k = m$, m es un número natural, entonces*

$$a^k = \begin{cases} a, & para \;\; m = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \; veces}, & para \;\; m \geq 2 \end{cases}$$

b) *$k = \frac{1}{q}$, donde q es un número natural, entonces $a^k = \sqrt[q]{a}$;*
c) *$k = \frac{p}{q}$, donde p, q son números naturales, entonces $a^k = \sqrt[q]{a^p}$;*
d) *k es un número irracional, entonces:*
i) *Si $a > 1$, el número p^k será mayor que a^{r_1} y menor que a^{s_t}, donde r_i es cualquier aproximación racional del número k por defecto y s_t, cualquier aproximación racional del número k por exceso;*
ii) *Si $0 < a < 1$, entonces a^k es un número menor que a^{r_i} y mayor que a^{s_t};*
iii) *Si $a = 1$, entonces $a^k = 1$.*
2.- *Si $k < 0$, entonces $a^k = \frac{1}{a^{|k|}}$.*
El número a^k recibe el nombre de potencia, el número a es la base de la potencia y k, el exponente de la potencia.

La potencia de un número positivo posee las siguientes propiedades principales: si a y b son números positivos, y k y r, cualesquiera números reales, entonces:
1.- $(ab)^k = a^k b^k$;
2.- $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$;
3.- $a^k a^r = a^{k+r}$;
4.- $\frac{a^k}{a^r} = a^{k-r}$;
5.- $(a^k)^r = a^{kr}$.

Ejemplo 4.25 *Simplifique la expresión:*

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \div \left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{3}}} \div \sqrt[4]{\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \left(2 \cdot \sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left[\left(3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{3}} \right)^{\frac{1}{1}} \div \left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{\frac{3}{2}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \div \left[3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3 \cdot \sqrt[4]{3}\right)^{\frac{1}{6}} \div \left(3 \cdot \sqrt[3]{3}\right)^{\frac{1}{8}} \right]^{\frac{3}{2}} \\
&= 2^{\frac{2}{3}} \div \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{24}} \div 3^{\frac{1}{8}} \cdot 3^{\frac{1}{24}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 2^{\frac{2}{3}} \div \left(3^{\frac{17}{24}} \div 3^{\frac{1}{6}} \right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \div \left(3^{\frac{13}{24}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 2^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{13}{16}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{13}{16}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.26 *Simplifique la expresión:*

$$\left(\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{8\cdot\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{32\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[3]{4}}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \left[(16)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(8\cdot\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{12}}\right]\cdot(32)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(4\cdot\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{1}{8}}\\
&= (16)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(8\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot(32)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{7}{12}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\cdot 4^{\frac{1}{24}}\\
&= 2^{\frac{8}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{7}{12}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\\
&= 2^{\frac{8}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{7}{12}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\\
&= 2^{\frac{35}{6}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.27 *Simplifique la expresión:*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$$

Solución
Para simplificar esta expresión, multiplicamos y dividimos para el factor racionalizante, es decir:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}\\
&= \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}\\
&= \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}\\
&= \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.28 *Simplifique la expresión:*

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

Solución
Para simplificar esta expresión, multiplicamos y dividimos para el factor racionalizante, es decir:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\\
&= \sqrt[6]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}+\sqrt[3]{5-4}\\
&= \sqrt[6]{81-80}+1\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.29 *Simplifique la expresión:*

$$\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)$$

Solución
Para simplificar esta expresión, hacemos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right) \\
&= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right) \\
&= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} \\
&= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\
&= \sqrt{a}+\sqrt{b}.
\end{aligned}$$

Si $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \neq 0$.

A continuación estudiamos las principales propiedades de la potencia de un número positivo del tipo de desigualdad.

Teorema 4.16 *Si $a > 1$ y $k > 0$, entonces $a^k > 1$.*
Demostración
Si $k = \frac{p}{q}$ es un número racional (p y q son números naturales), entonces la propiedad de $a^k > 1$ ya se demostró anteriormente. Si k es un número irracional, elegimos cualquier número racional positivo r que aproxima k por defecto, en este caso $a^k > a^r$. Al mismo tiempo $a^r > 1$. Conforme a la propiedad de transitividad de las desigualdades, la validez de dos igualdades $a^k > a^r$ y $a^r > 1$ predetermina la validez de la desigualdad $a^k > 1$.

Teorema 4.17 *Si $a > 1$ y $k < 0$, entonces $a^k < 1$.*
Demostración
El número $r = -k$ es positivo, por lo cual, al aplicar el teorema anterior, tenemos $a^r > 1$. Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por el número positivo a^k, según la propiedad de las desigualdades tenemos $a^r a^k > a^k$; según la definición de potencias concluimos que $a^r a^k = a^{k+r} = a^0 = 1$, por consiguiente $a^k < 1$.

Teorema 4.18 *Si $a > 1$ y $a^k > 1$, entonces $k > 0$.*
Demostración
Supongamos que $a^k > 1$ y $a > 1$, pero $k \leq 0$, es decir, o bien $k = 0$ o bien $k < 0$. Si $k = 0$, entonces $a^k = 1$ por definición. Si $k < 0$ y $a > 1$, entonces, aplicando el teorema anterior, tenemos $a^k < 1$. Así pues, si $k \leq 0$, entonces $a^k \leq 1$, lo que contradice la suposición de que $a^k > 1$.

Teorema 4.19 *Si $a > 1$ y $a^k < 1$, entonces $k < 0$.*

Si $a > 1$, entonces las condiciones $a > 1$ y $k > 0$ son equivalentes; además, son equivalentes las condiciones $a < 1$ y $k < 0$, es decir, si $a > 1$, entonces:

$$a^k > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > 0; \qquad\qquad a^k < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < 0.$$

Teorema 4.20 *Si $0 < a < 1$ y $k > 0$, entonces $a^k < 1$.*

Demostración

Examinemos el número $b > \frac{1}{a}$. Por cuanto $b > 1$, entonces, aplicando el teorema 1, tendremos $b^k = 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta desigualdad por el número positivo a^k. Según la propiedad de las desigualdades tenemos: $b^k a^k > a^k$. Según la propiedad de las potencias tenemos $b^k a^k = (ab)^k = 1^0 = 1$, por lo cual $a^k < 1$.

Teorema 4.21 *Si $0 < a < 1$ y $k < 0$, entonces $a^k > 1$.*

Teorema 4.22 *Si $0 < a < 1$ y $a^k > 1$, entonces $k < 0$.*

Teorema 4.23 *Si $0 < a < 1$ y $a^k < 1$, entonces $k > 0$.*

Si $0 < a < 1$, entonces las condiciones $a^k > 1$ y $k < 0$ son equivalentes, además, son equivalentes las condiciones $a^k < 1$ y $k > 0$, es decir, si $0 < a < 1$, entonces:

$$a^k > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < 0; \qquad\qquad a^k < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > 0.$$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces las condiciones $a^k = 1$ y $k = 0$ son equivalentes, es decir, si $a > 0$ y $a \neq 1$, se tiene:

$$a^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$

Teorema 4.24 *Si $a > 1$ y $k_1 > k_2$, entonces $a^{k_1} > a^{k_2}$.*

Teorema 4.25 *Si $a > 1$ y $k_1 < k_2$, entonces $a^{k_1} < a^{k_2}$.*

Teorema 4.26 *Si $a > 1$ y $a^{k_1} > a^{k_2}$, entonces $k_1 > k_2$.*

Teorema 4.27 *Si $a > 1$ y $a^{k_1} < a^{k_2}$, entonces $k_1 < k_2$.*

Si $a > 1$, entonces las condiciones $a^{k_1} > a^{k_2}$ y $k_1 > k_2$ son equivalentes; además, son equivalentes las condiciones $a^{k_1} < a^{k_2}$ y $k_1 < k_2$, es decir, si $a > 1$, entonces:

$$a^{k_1} > a^{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 > k_2; \qquad\qquad a^{k_1} < a^{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 < k_2.$$

Teorema 4.28 *Si $0 < a < 1$ y $k_1 > k_2$, entonces $a^{k_1} < a^{k_2}$.*

Teorema 4.29 *Si $0 < a < 1$ y $k_1 < k_2$, entonces $a^{k_1} > a^{k_2}$.*

Teorema 4.30 *Si $0 < a < 1$ y $a^{k_1} > a^{k_2}$, entonces $k_1 < k_2$.*

Teorema 4.31 *Si $0 < a < 1$ y $a^{k_1} < a^{k_2}$, entonces $k_1 > k_2$.*

Si $0 < a < 1$, entonces las condiciones $a^{k_1} > a^{k_2}$ y $k_1 < k_2$ son equivalentes; además, son también equivalentes las condiciones $a^{k_1} < a^{k_2}$ y $k_1 > k_2$, es decir, si $0 < a < 1$, se tiene:

$$a^{k_1} > a^{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 < k_2; \qquad\qquad a^{k_1} < a^{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 > k_2.$$

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces las condiciones $a^{k_1} = a^{k_2}$ y $k_1 = k_2$ son equivalentes, es decir, si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces:

$$a^{k_1} = a^{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2.$$

Si $k > 0$, el concepto de operación de elevación a una potencia puede extenderse al conjunto de todos los números no negativos, puesto que, por definición $0^k = 0$, si $k > 0$.

4.8. Tarea

1. Simplifique la siguiente expresión:

a) $\left[(-1+4-5+2)^2\right]^3+\sqrt[5]{9^2(-3)}\cdot\sqrt[5]{(-8)(-2)(-4+6)}-\left[\sqrt[3]{(35\div 7)(-10+7+2)}\right]^6$
$+\left[\sqrt{(-15)(-3)(-3+5)}\right]^2$

b) $\sqrt[3]{-375}\div\sqrt[3]{-3}+\sqrt[5]{192}\div\sqrt[5]{-6}-\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-32}+[(-2)(-3)]^2-[(-2)(-6)^3(-11)]^0$
$-\sqrt[3]{(-8)(-30+3)^3};$

c) $[2(-3)+8]^5+\sqrt{(-200)\div(-10+2)}+\sqrt[3]{1372\div(5-1)}-(-1+2-4)^2$
$+\sqrt[4]{(512\cdot 4)\div(-1+9)};$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}+1^{-1}\div\left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)\div\frac{25}{16}}+(-2)^{-3}+(-1)^{-2}\div\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{4}\div\frac{3}{8}\right)^{-1};$

e) $[(-6-2+5)\div(9-6)]^5-\sqrt{(-2)(-1)}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4-6}+\sqrt{\sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt{16}\cdot(-3)}$
$+\sqrt[3]{5-\sqrt{169}};$

f) $\left[1\div\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-2}-10\left(-\frac{2}{3}\right)2^{-2}\sqrt{\frac{(-288)\left(-\frac{1}{2}\right)}{25}}-\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-3};$

g) $\dfrac{\left(-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}+3\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)}{\frac{-2+\frac{25}{12}}{-\frac{1}{2}}}\div\left[\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}-\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)}\right]^{-1}.$

2. Simplifique la siguiente expresión:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{5}\right)(-12)-\frac{3}{2}\div\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\sqrt[5]{-\frac{1}{64}}\right)^{-1};$

b) $\sqrt[3]{-8}\cdot(-8)^3+(-3)(-2)^3-\sqrt{5+\sqrt{16}}+(-2)^2\div\sqrt[3]{-64};$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)\div 3-\frac{1}{3}\left(-\frac{15}{4}\right)+2\div\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{3}{2}\div(-3);$

d) $\sqrt[5]{(-1215)\div 5}-\sqrt{(-49)(-16)}-\sqrt[3]{216\cdot(-125)\div(-1+28)};$

e) $1-\frac{1+2^2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{24}}-\sqrt[3]{-3-\frac{3}{8}};$

f) $\left(-\dfrac{7}{3}\right)\div(-14)+2\div\sqrt{3-\dfrac{2}{9}}-\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}\div\left(-\dfrac{3}{2}\right);$

g) $\dfrac{-\frac{2}{3}-\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{25}\cdot 5+1}{-4\div\left(-\frac{1}{9}\right)^{-1}-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt{\left(-\frac{3}{28}\right)(-21)}};$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]\sqrt[3]{-1+\frac{7}{8}}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}+\left(-1+\frac{5}{6}\right)\right]}}\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{1}{5}\div\left(-\frac{1}{100}\right)}{\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^{-1}}};$

i) $\dfrac{\dfrac{6-\frac{2}{5}}{-6}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{4}{15}}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{5}+1}{\dfrac{2}{3}+1}};$

j) $\dfrac{\left(\sqrt[6]{5\sqrt{5}}\right)^2\cdot\left(\sqrt[6]{25\sqrt[3]{25}}\right)^4}{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}\right)^{\frac{1}{3}};$

k) $\left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}}\div\sqrt[9]{4\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt[9]{9}};$

l) $\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{144}}-\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{4\sqrt{4}}}+\sqrt[5]{\sqrt[3]{-64}\cdot\sqrt{\sqrt{256}\cdot\sqrt{4}}}.$

3. Simplifique la expresión:

a) $(\sqrt{32}+\sqrt{45}-\sqrt{98})(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8});$

b) $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}};$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1};$

d) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}};$

e) $\sqrt{27-10\sqrt{2}};$

f) $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$

4. Simplifique la expresión:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

5. Transforme la expresión:

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}.$$

6. Simplifique la expresión:

a) $\sqrt{\dfrac{x+y^2}{y}+2\sqrt{x}}-\sqrt{\dfrac{x+y^2}{y}-2\sqrt{x}};$

b) $\left(\dfrac{x\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\right)\div\sqrt[3]{x^2};$

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right)\div\left(1+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right).$

7. Simplifique las expresiones:

a) $2x^2-5xy+2y^2$ con $x=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ y $y=\sqrt{6}-\sqrt{5};$

b) $3x^2+4xy-3y^2$ con $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ y $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}};$

c) $4x^3+2x^2-8x+7$ con $x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1);$

d) $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ con $x=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}$ y $y=\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1};$

e) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ con $x=\dfrac{2ab}{1+b^2};$

f) $2a\sqrt{1+x^2}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}$ con $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{ba^{-1}}\right).$

8. Simplifique las expresiones:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2})}$;

c) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

e) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$;

f) $\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$;

g) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$;

h) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$;

i) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

9. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$;

h) $\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$;

i) $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.

10. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}}$;

b) $(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}$;

d) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$;

e) $\left(\dfrac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$;

f) $\left(\dfrac{3}{\frac{[}{3}]64-\sqrt[3]{25}}+\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\dfrac{10}{\sqrt{25}}\right)^{-1}(13-4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{25})+\sqrt[3]{25}$;

g) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}$;

h) $\sqrt{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

11. Simplifique la expresión:

a) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)$;

b) $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$;

c) $$\frac{a^{-1}+b^{-1}+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)}{\left(\frac{ab-a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right)^{-1}};$$

d) $$\frac{a\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}};$$

e) $$\frac{1}{2}ab\cdot\sqrt{8a^3b}+\frac{1}{3}ab\cdot\sqrt{18ab^3}-a^2\cdot\sqrt{\frac{2b}{a}}-b^2\cdot\sqrt{\frac{2a}{b}};$$

f) $$\left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right)\div\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c}\right);$$

g) $$\frac{2a^{-1/3}}{a^{2/3}-3a^{1/3}}-\frac{a^{2/3}}{a^{5/3}-a^{2/3}}-\frac{a+1}{a^2-4a+3};$$

h) $$\sqrt[4]{6a(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2a}-2\sqrt{3a}};$$

i) $$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{24}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}};$$

j) $$\frac{[(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2-(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2]^2-(16a+4b)}{4a-b}+\frac{10\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

k) $$\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48};$$

l) $$\frac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}};$$

m) $$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}};$$

n) $$\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^{-2};$$

o) $$\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}}{1-\sqrt[4]{a^3b^3}}-\frac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}};$$

p) $$\frac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\left(\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{n}{m-\sqrt{mn}}-\frac{m}{n+\sqrt{mn}}\right);$$

q) $$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right);$$

r) $$2a\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}:\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}\right];$$

s) $$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}}-\frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}}\right)^{-2}-\sqrt{a^2+8a+16};$$

t) $\left(\sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right)^{-1}}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1\right)^{-1}}\right):\left(\sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right)^{-1}}-\sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1\right)^{-1}}\right);$

u) $\left(\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\left(\frac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^2}}\right)^{-1}};$

v) $\left(\frac{(1-a)^{1/4}}{2(1+a)^{3/4}}+\frac{(1+a)^{1/4}(1-a)^{-3/4}}{2}\right)(1-a)^{-1/2}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{-1/4};$

w) $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}+\frac{1-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}}\right):\frac{\sqrt{a-\frac{1}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{a}}};$

x) $b\left[\left(\frac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right]^{-1};$

y) $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right)\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a};$

z) $\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}.$

12. Simplifique la expresión:

a) $\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-a)}{a-b};$

b) $\left(\frac{1}{a^{1/3}-a^{1/6}+1}+\frac{1}{a^{1/3}+a^{1/6}+1}-\frac{2a^{1/3}-2}{a^{2/3}-a^{1/3}+1}\right)^{-1}-\frac{1}{4}a^{4/3};$

c) $\left(\frac{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})+2\sqrt[4]{ab}}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)^{-1}+1\right)^{1/2}\cdot\sqrt[8]{ab};$

d) $\left(\frac{(a+b)(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})^{-1}-(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2})(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})^{-2}}{(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{b}+\sqrt[6]{ab}-2\sqrt[3]{a})}\right)^{-1}+2\sqrt[6]{a}.$

4.9. Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales, cuando al multiplicar o dividir el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda multiplicado o dividido por el mismo número.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto entre dos cantidades correspondientes es constante. A esta constante se le denomina constante de proporcionalidad.

Para realizar el reparto de una cantidad de forma inversamente proporcional a unas cantidades, es equivalente a repartirla de forma directamente proporcional a los inversos de las cantidades.

Haremos lo siguiente:

1. Se suman las cantidades inversas a repartir.

2. Se divide la cantidad por esta suma. El cociente nos dará la constante de proporcionalidad.

3. Para calcular cada parte basta con multiplicar cada cantidad por esa constante.

Ejemplo 4.30 *¿Cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales?*

1. La velocidad de un automóvil y el tiempo que tarda en realizar un mismo recorrido.
(No) son directamente proporcionales. Si la velocidad se hace doble, triple, ..., el tiempo necesario para hacer el mismo recorrido no es doble, triple, ...

2. La distancia recorrida por un automóvil y el tiempo empleado, manteniendo la misma velocidad.
(Sí) son directamente proporcionales. Si la distancia se hace doble, triple, ..., el tiempo deberá ser doble, triple, ...

3. La longitud del lado de un cuadrado y la superficie del mismo.
(No) son directamente proporcionales. Si la longitud se hace doble, triple, ..., la superficie no es doble, triple, ...

4. La edad de una persona y su estatura.
(No) son directamente proporcionales. Si la edad se hace doble, triple, ..., la estatura no es doble, triple, ...

Ejemplo 4.31 *Si por un auto se paga \$ 8000, por 2 se paga \$ 16000, por 3 se paga \$ 24000, entonces tenemos que*

$$\begin{cases} 1 & \longrightarrow & 8000 \\ 2 & \longrightarrow & 16000 \\ 3 & \longrightarrow & 24000 \end{cases}$$

La razón entre cada medida de la magnitud precio y el número de autos que le corresponden, es la misma. Es decir

$$\frac{8000}{1} = \frac{16000}{2} = \frac{24000}{3} = 8000$$

Si designamos por x el número de autos y por y el precio correspondiente, se tiene

$$\frac{y}{x} = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6x.$$

4.10. Razones y proporciones

Las razones y proporciones tienen una gran aplicación en diversas áreas; por ejemplo, en ingeniería se emplean las escalas para realizar maquetas, en el área contable, para realizar movimientos financieros, etc.

Una razón es la comparación por cociente de dos números. Este cociente se interpreta como el número de veces que uno de ellos es mayor que el otro, esto se expresa como

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \quad B \neq 0 \text{ y } D \neq 0.$$

En una razón, al término A se le llama antecedente y al término B, consecuente.

4.10.1. Proporcionalidad directa

La proporcionalidad directa entre las cantidades x y y está dada por una expresión de la forma

$$y = \lambda x$$

Esto significa que la variable y tiene una variación proporcional a la variable x: Cuanto aumenta x, con el mismo tanto λ, aumenta y.

La proporcionalidad directa aparece comúnmente en las relaciones entre las variables principales de fenómenos o procesos naturales. Para ejemplo, cuando se dice: Durante una reacción de primer orden, la cantidad de un reactivo que permanece por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad que reacciona, si Q_t es la cantidad de reactivo al tiempo t y $Q+t+1$ es la cantidad por reaccionar una unidad de tiempo después, se habla de una relación de la forma

$$Q_{t+1} = \lambda Q_t$$

donde λ es la constante de proporcionalidad.

Se observa que si la variable x es directamente proporcional a la variable y, entonces de las parejas relacionadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) mediante las igualdades $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$ se obtiene, al dividirlas miembro a miembro

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda x_1}{\lambda x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

la cual se conoce como la regla de tres. Esto nos permite resolver problemas sin tener que calcular la constante de proporcionalidad λ.

4.10.2. Proporcionalidad inversa

Existe otro tipo de proporcionalidad entre las cantidades x y y, que tiene la forma

$$y = \frac{\lambda}{x}$$

Esta es llamada proporcionalidad inversa con constante λ. Tal tipo de proporcionalidad aparece también en los procesos y fenómenos de la naturaleza. Por ejemplo, cuando se dice: En un gas ideal a temperatura constante, la presión que ejerce el gas es inversamente proporcional al volumen que ocupa, esto puede escribirse como

$$P = \frac{\lambda}{V}$$

donde P es la variable presión, V es el volumen del gas y λ es la constante de proporcionalidad.

Algunos de los principios más conocidos de la ciencia pueden expresarse como variaciones. A continuación se mencionan algunas:
Las áreas de las figuras semejantes son directamente proporcionales a los cuadrados de las líneas correspondientes.
Los volúmenes de los sólidos semejantes son directamente proporcionales a los cubos de las líneas correspondientes.
Los volúmenes de los gases son inversamente proporcionales a la presión absoluta y directamente proporcionales a la temperatura absoluta.
En cualquier reacción química entre sustancias A y B, la cantidad de la sustancia A que interviene en la reacción es directamente proporcional a la cantidad de la sustancia B que también interviene.

Ejemplo 4.32 *Escriba, mediante una fórmula, las siguientes proposiciones:*
a) *w varía directamente como x e y.*
b) *w es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a y.*
c) *w es directamente proporcional al cubo de x e inversamente al cuadrado de z.*
d) *w es directamente proporcional a la raíz cúbica de b e inversamente a la raíz cuadrada de c.*
e) *R es directamente proporcional a w y a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de h.*

Solución

a) Si λ es la constante proporcionalidad entre las variables dadas, la relación se escribe

$$w = \lambda xy.$$

b) Utilizamos una sola constante λ para escribir la relación entre las variables, que quedan

$$w = \frac{\lambda x}{y}.$$

c) Si se utiliza a λ como constante de proporcionalidad, lo anterior se escribe

$$V = \frac{\lambda x^3}{z^2}.$$

d) Se tiene en este caso, la relación

$$w = \frac{\lambda \sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$$

donde λ es una constante de proporcionalidad.
e) Para este caso, se utiliza igualmente una sola constante de proporcionalidad λ para todas las variables, obteniéndose la relación

$$R = \frac{\lambda \sqrt{x} w}{h^3}.$$

Ejemplo 4.33 *La variable N es inversamente proporcional a y. Además se sabe que $N = 20$ cuando $y = 0,35$. Calcular la relación entre las variables dadas.*

Solución

Ya que para alguna λ se tiene que $N = \frac{\lambda}{y}$, de las condiciones $N = 20$, y $y = 0,35$ se tiene que $20 = \frac{\lambda}{0{,}35}$. Esto implica que $\lambda = 20 \cdot 0,35 = 7$. De esta forma la relación entre N y y es $N = \frac{7}{y}$.

Ejemplo 4.34 *P es inversamente proporcional a V. Si $V = 30$ litros cuando $P = 2$ atmósferas, hallar V cuando $P = 25$ atmósferas.*

Solución

Ya que $P = \frac{\lambda}{V}$ y 2atmósferas $= \frac{\lambda}{30 \text{ litros}}$, entonces $\lambda = 60$ atm x lt, lo que implica que

$$P = \frac{60}{V}.$$

De esta manera, si $P = 25$ atm, entonces $25 = \frac{60}{V}$, lo cual implica que

$$V = \frac{60 \text{ atm x lt}}{25 \text{ atm}} = 2,4 \text{ lt}.$$

Ejemplo 4.35 *La variable C es directamente proporcional a d^2. Si $C = 80$ cuando $d = 12$, hallar C cuando $d = 15$.*

Solución
Si $c = \lambda d^2$ entonces de la pareja de igualdades $80 = \lambda \cdot 12^2$ y $C = \lambda \cdot 15^2$ se tiene que, al dividir miembro por miembro la segunda igualdad y la primera

$$\frac{C}{80} = \frac{\lambda \cdot 15^2}{\lambda \cdot 12^2} = \frac{15^2}{12^2}$$

obtenemos el valor de la constante

$$C = \left(\frac{15}{12}\right)^2 \cdot 80 = 1,5625.$$

Ejemplo 4.36 *La variable v es directamente proporcional a $\sqrt{h}$. Si $v = 28$ cuando $h = 3$, hallar v cuando $h = 12$.*
Solución
Ya que v es directamente proporcional a $\sqrt{h}$ entonces $v = \lambda\sqrt{h}$, lo que nos lleva a las igualdades $28 = \lambda\sqrt{3}$ y $v = \lambda\sqrt{12}$. Al dividir miembro a miembro la segunda igualdad entre la primera se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{v}{28} &= \frac{\lambda\sqrt{12}}{\lambda\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{12}{3}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

De esta forma $v = 2 \cdot 28 = 56$.

Ejemplo 4.37 *La variable R es directamente proporcional a l e inversamente proporcional a d^2. Si $R = 35$ cuando $l = 110$ y $d = 0,006$. Hallar R cuando $l = 75$ y $d = 0,004$.*
Solución
De la relación $R = \dfrac{\lambda l}{d^2}$ y de las condiciones dadas se tienen las igualdades $35 = \dfrac{\lambda \cdot 110}{0,006^2}$ y $R = \dfrac{\lambda \cdot 75}{0,004^2}$ nuevamente, al dividir la segunda ecuación miembro a miembro con la primera se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{R}{35} &= \frac{\frac{\lambda \cdot 75}{0,004^2}}{\frac{\lambda \cdot 110}{0,006^2}} \\ &= \frac{\lambda \cdot 75 \cdot 0,006^2}{\lambda \cdot 110 \cdot 0,004^2} \\ &= \frac{75}{110} \cdot \left(\frac{0,006}{0,004}\right)^2 \\ &= 1,534. \end{aligned}$$

lo cual implica que $R = 1,534 \cdot 35 = 53,69$.

Ejemplo 4.38 *El hidrógeno usado para inflar globos se obtiene haciendo pasar vapor de agua sobre una malla de hierro al rojo vivo. Si con 390 gr de hierro se obtienen 2,2 m^3 de hidrógeno, ¿cuánto hierro se necesitará para obtener 33 m^3?*
Solución

Denotemos por h la cantidad de hierro necesario en g para obtener H m^3 de hidrógeno. Entonces es claro que la relación entre una pareja (h_1, H_1) y (h_2, H_2) viene dada por la regla de tres

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{H_2}{h_2}.$$

De esta manera, para las condiciones dadas se tiene la relación

$$\frac{2,2}{390} = \frac{33}{h}$$

lo cual nos dice que el hierro necesario para obtener 33 m^3 de hidrógeno es

$$h = \frac{33}{2,2} \cdot 390 = 5850 \text{ gr.}$$

Ejemplo 4.39 *La distancia aérea entre los puertos A y B es de 325 km. Los puertos distan 18 cm en un mapa. ¿Cuál es la distancia aérea entre los puertos C y D que distan 23 cm en el mismo mapa?.*

Solución

Sea D la distancia aérea entre A y B y d su correspondiente distancia sobre el mapa. De la relación de proporcionalidad directa se tiene que en correspondientes (d_1, D_1), (d_2, D_2) se cumple la igualdad

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{D_2}{d_2}.$$

De esta forma, para las condiciones se tiene la ecuación

$$\frac{325}{18} = \frac{D}{23}$$

que equivale a

$$D = \frac{325}{18} \cdot 23 = 415,27 \text{ km.}$$

Ejemplo 4.40 *Un disco de 40,6 cm de diámetro pesa 2,570 gr. ¿Cuál será el diámetro de un disco del mismo espesor que pesa 945 gr?*

Solución

Ya que ambos discos tienen el mismo espesor, apenas varían sus áreas según el cuadrado de sus diámetros. Como el material es el mismo, se tiene que la densidad es igual y entonces el peso del disco varía según varíe el área y, por lo tanto, depende de cómo varía el diáametro.

Por otro lado, las áreas de figuras semejantes son directamente proporcionales a los cuadrados de sus líneas correspondientes. De esta forma, se guarda una relación de proporcionalidad para las parejas (d_1^2, P_1) y (d_2^2, P_2) de la forma

$$\frac{P_1}{d_1^2} = \frac{P_2}{d_2^2}$$

donde P es el peso del disco y d es su diámetro. Por lo tanto, para $P_1 = 2,570$, $d_1 = 40,6$ y $P_2 = 945$ se cumple una igualdad

$$\frac{2,570}{40,6^2} = \frac{945}{d_2^2}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{\frac{945}{2,570} \cdot 40,6^2} \\ &= \sqrt{\frac{945}{2,570}} \cdot 40,6. \end{aligned}$$

es el diámetro del disco mencionado.

Ejemplo 4.41 *Una esfera de hierro de 6,3 cm de diámetro pesa 850 gr. ¿Cuánto pesará otra esfera de hierro de 9,2 cm de diámetro?*

Solución

Como las esferas son semejantes, entonces sus volúmenes son proporcionales a los cubos de sus radios. Por lo tanto, sus pesos correspondientes P_1, P_2 guardan la relación de proporcionalidad con los cubos de los diámetros

$$\frac{P_1}{d_1^3} = \frac{P_2}{d_2^3}$$

donde d_1 es el diámetro de la esfera de peso P_1 y d_2 es el de la esfera de peso P_2. Para los datos dados $P_1 = 850$, $d_1 = 6,3$, $d_2 = 9,2$, $P_2 =?$ se cumple la relación

$$\frac{850}{6,3^3} = \frac{P_2}{9,2^3}$$

lo cual implica que el peso P_2 buscado es

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{850}{6,3^3} \cdot 9,2^3 \\ &= 850 \cdot \left(\frac{9,2}{6,3}\right)^3 \\ &= 2647,04 \text{ gr.} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.42 *La fórmula $D = \frac{\lambda P L^3}{th^3}$, da la deflexión de una viga, de longitud L entre los puntos de apoyo, con una carga P en el centro, una anchura t y un grosor h. Si D es 4 cuando $P = 250$, $L = 12$, $h = 3$ y $t = 2,5$, hallar D cuando P es 400, L es 10, h es 4 y t es 2.*

Solución

De la relación de proporcionalidad

$$D = \frac{\lambda P L^3}{th^3}$$

sujeta a los argumentos dados, se tiene la igualdad

$$4 = \frac{\lambda \cdot 250 \cdot 12^3}{2,5 \cdot 3^3}$$

lo cual implica que la constante de proporcionalidad es

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 3^3}{250 \cdot 12^3} \\ &= \frac{270}{898560} \\ &= 0,0003. \end{aligned}$$

De esta manera, la relación obtenida es

$$D = \frac{0,0003 P L^3}{th^3}$$

Esto implica que para los argumentos $P = 400$; $L = 10$, $h = 4$, $t = 2$ se tiene una deflexión

$$\begin{aligned} D &= \frac{0,0003 \cdot 400 \cdot 10^3}{2 \cdot 4^3} \\ &= 0,937. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.43 *La cantidad C del agua que sale por un orificio en el fondo de un depósito es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura h de la superficie libre del líquido. El caudal es de 85 litros/minuto cuando la altura es de 2,56 m:*

a) *Encuentre una fórmula de C dependiendo de h.*

b) *Calcule C cuando $h = 4,62$ mt.*

c) *Encuentre h cuando $C = 62$ litros/minuto.*

Solución

La relación entre las variables C y h tiene la forma $C = \lambda\sqrt{h}$ para alguna constante real λ.
Si para $h = 2,56$ m se tiene que $C = 85$ lt/min, entonces se tiene la igualdad $85 = \lambda\sqrt{2,56}$ lo que nos da constante de proporcionalidad $\lambda = \dfrac{85}{\sqrt{2,56}} = 53,125$. De esta forma $C = 53,125\sqrt{h}$ lo que responde al inciso a).
Utilizando esta relación, se tiene que si $h = 4,62$ mt, entonces el valor asociado a C es $C = 53,125\sqrt{4,62} = 114,18$ lt/min, lo cual responde la pregunta b).
Finalmente, si $C = 62$ lt/min entonces, de la relación $462 = 53,125\sqrt{h}$ se obtiene la igualdad

$$h = \left(\frac{62}{53,125}\right)^2 = 1,36 \text{ mt.}$$

Ejemplo 4.44 *Un hombre de 1,70 mt de estatura pesa 75 kg. Otro hombre, de constitución parecida, mide 1,80 mt. ¿Cuál será el peso del segundo?*

Solución

Ya que ambos hombres tienen una constitución parecida, podemos suponer que tienen en su forma voluminosa una semejanza, y que por tanto, sus longitudes correspondientes (tallas) son proporcionales a sus pesos. Esto es, si l_1 es la talla asociada al peso P_1 del primer hombre y l_2 es la talla asociada al peso P_2 del otro hombre, entonces es justa una relación

$$\frac{P_1}{l_1^3} = \frac{P_2}{l_2^3}$$

Ya que para nuestro caso $l_1 = 1,7$ mt y $P_1 = 75$ kg, entonces para el segundo hombre se cumple

$$\frac{75}{1,7^3} = \frac{P_2}{1,8^3}$$

es decir, el peso P_2 del hombre es

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{75 \cdot 1,8^3}{1,7^3} \\ &= 75 \cdot \left(\frac{1,8}{1,7}\right)^3 \\ &= 89,02 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.45 *La distancia del horizonte, en el mar, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura del observador sobre el nivel del mar. Si el horizonte está a 7,2 km para una altura de 4,1 mt, hallar la distancia correspondiente a una altura de 110 mt.*

Solución

Entiéndase por d la distancia del horizonte en el mar y por h a la altura de un observador sobre el nivel del mar. Entonces, es justa una relación entre tales variables

$$d = \lambda\sqrt{h}$$

Dadas las condiciones $d = 7,2$ km y $h = 4,1$ m se tiene que

$$7,2 = \lambda\sqrt{4,1} = \lambda \cdot 2,02$$

lo que implica que

$$\lambda = \frac{7,2}{2,02} = 3,56$$

es la constante de proporcionalidad buscada.
Así, la relación entre las variables es $d = 3,56\sqrt{h}$. De esta manera, para $h = 110$ mt se tiene una distancia al horizonte

$$d = 3,56\sqrt{110} = 37,33 \text{ km}.$$

Ejemplo 4.46 *Una persona, al comprar una torre de 100 cd´s, verifica que 4 están defectuosos, encuentre la razón.*
Solución
La razón que se obtiene es

$$\frac{4 \text{ cd's defectuosos}}{100 \text{ torre de cd's}}$$

Simplificando esta razón, se tiene

$$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Lo cual se interpreta como: de cada 25 cd´s, 1 está defectuoso.

4.10.3. Proporción

Definición 4.17 Proporción
Se llama proporción a la equivalencia entre dos razones y, se representa por

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \quad B \neq 0 \text{ y } D \neq 0.$$

En una proporción, a los términos A y D se les denomina extremos y a B y C, medios.

Ejemplo 4.47 *Una persona, compró una torre de 100 cd´s y pagó por ella \$ 23. Si necesita 600 cd´s, ¿cuánto deberá pagar?*
Solución
En este caso, tenemos

$$\frac{100 \text{ cd's}}{\$23} = \frac{600 \text{ cd's}}{x} \quad \Rightarrow \quad 100x = 23 \cdot 600$$

$$x = \frac{23 \cdot 600}{100} \quad \Rightarrow \quad x = \$138.$$

Es decir, las 6 torres de 100 cd´s cuestan 138 dólares.

4.11. Tarea

1. Determine el extremo desconocido en las siguientes proporciones:

a) $\dfrac{\frac{3}{2}-x}{1,333...-1}=\dfrac{x}{(9\cdot 0,666...)^{-1}}$;

b) $\dfrac{x}{\frac{2}{5}-0,1}=\dfrac{\frac{1}{2}(3-0,6)}{(0,1)^2-1}$;

c) $\dfrac{x}{-\frac{5}{4}}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}}$;

d) $\dfrac{x}{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{4}{9}}}=\dfrac{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{16}}}{0,099...}$;

e) $\dfrac{-2+\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{x}$;

f) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{8}{9,6}$;

g) $\dfrac{\frac{1}{4}-1}{-0,5-\sqrt{\frac{1}{16}}}=\dfrac{-0,5-\sqrt{\frac{1}{16}}}{x}$;

h) $\dfrac{x}{\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{9}}$;

i) $\dfrac{(3+0,5)\sqrt{\frac{1}{49}}}{x}=\dfrac{x}{1-\frac{1}{2}}$;

j) $\dfrac{(0,1)^2\sqrt{1-\frac{5}{9}}}{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{(0,5-1)\left(1-\frac{2}{3}\right)}{x}$;

k) $\dfrac{x}{\frac{3}{4}-0,05}=\dfrac{\frac{3}{4}-0,05}{1,8-0,4}$;

l) $\dfrac{(0,2)^2+1,46}{x}=\dfrac{(1,1)^2+0,29}{-0,5}$;

m) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{2}{5}}{x}$;

n) $\dfrac{x}{1+0,2}=\dfrac{1}{(0,1+0,3)^2}$;

o) $\dfrac{(1-0,2)^2}{0,4}=\dfrac{0,4}{x}$;

p) $\dfrac{\sqrt{1-\frac{5}{9}}}{x}=\dfrac{x}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{19}{27}}\right)^2\cdot\frac{8}{3}}$;

q) $\dfrac{\left(3-\frac{1}{2}\right)^{-2}}{x}=\dfrac{x}{2\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}}$;

r) $\dfrac{x}{0,3-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{6}-0,5}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$;

s) $\dfrac{0,1(1-0,1)}{0,1-1\cdot 0,4}=\dfrac{\frac{1}{4}-1}{x}$;

t) $\dfrac{(1,2-0,3)^2}{(0,1)^3}=\dfrac{x}{0,7-1,3}$;

u) $\dfrac{5}{\sqrt{8}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{x}$;

v) $\dfrac{0,5}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{x}$;

w) $\dfrac{-\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{x}$;

x) $\dfrac{x}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{0,03}$.

2. Determine el extremo desconocido en las siguientes proporciones:

a) $\dfrac{-0,2-4,333...}{\sqrt{\frac{1}{81}}}=\dfrac{x}{\frac{5}{34}\cdot 0,444...}$;

b) $\dfrac{5,1515...\cdot\sqrt{1+\frac{5}{4}}}{x}=\dfrac{(1-1,4)^{-2}}{-1,2+\frac{1}{2}-0,4}$;

c) $\dfrac{\left(3-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{x}=\dfrac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{(0,1)^{-3}\sqrt{1-\frac{3}{4}}}$;

d) $\dfrac{0,055...-2^{-1}}{x}=\dfrac{0,888...}{\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}}$;

e) $\dfrac{1,5-1}{0,333...-2}=\dfrac{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{x}$;

f) $\dfrac{0,666...-1}{1,111...}=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{3-2x}$;

g) $\dfrac{x}{1,222...-2}=\dfrac{1,222...-2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$;

h) $\dfrac{(0,1)^{-2}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\sqrt[3]{\frac{8}{25}\div 5}}=\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\sqrt[3]{\frac{8}{25}\div 5}}{x}$;

i) $\dfrac{-0,5(0,1-1)}{x}=\dfrac{x}{(0,222...+2)^{-1}}$;

j) $\dfrac{x}{3,033...}=\dfrac{0,888...-1}{\frac{1}{0,555...}+0,222...}$;

k) $\dfrac{(1,1)^2-0,1\cdot 0,2}{2,5-8\cdot 0,1}=\dfrac{x}{1\div 0,1\cdot\sqrt[3]{0,343}}$.

3. Determine el extremo desconocido en las siguientes proporciones:

a) $\dfrac{\left[1-\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right]\div 2{-}1}{x}=\dfrac{x}{0,111...\cdot\sqrt{2+\frac{1}{4}}}$;

b) $\dfrac{(1,222...-0,333...)^{-1}}{1-\left(\frac{\frac{2}{3}-1}{2+\frac{1}{3}}\right)^{-1}}=\dfrac{(1,5-1,999...)^3}{x}$;

c) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-2\right)\cdot(0,1515...)^{-1}}{x}=\dfrac{x}{(-1,3636...)\cdot 5}$;

d) $\dfrac{(0,2)^{-1}+(0,1-0,01)\cdot(0,3)^{-2}}{\sqrt{1-0,6}}=\dfrac{\sqrt{(1-0,7)^2\div 0,1}}{x}$;

e) $\dfrac{x}{3,333...}=\dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}}{(0,5-1)^{-2}\cdot\frac{1}{92}\cdot 1,022...\cdot(2,5)^2}$;

f) $\dfrac{18\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\left[1,111...-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2}{x}=\dfrac{(0,666...)^2}{(1,222...)^{-1}\cdot(1-0,5)^2}$.

4. Dos números, cuya suma es 28, guardan entre sí la relación $\dfrac{3}{4}$. ¿Cuáles son esos números?

5. Descomponer el número $\dfrac{35}{6}$ en dos partes tales que cuya razón sea $\dfrac{3}{2}$.

6. La suma de los cuadrados de dos números positivos es 25. Si la razón entre ellos es $\dfrac{2}{1,5}$. ¿Cuáles son los números?

7. Calcular los dos números naturales tales que su diferencia es 9 y su razón es $\dfrac{11}{8}$.

8. Calcular dos números naturales de 2 cifras cada uno cuya razón es $\dfrac{7}{2}$ y tales que tienen iguales la cifra de las unidades y la de las decenas difieren en 3.

9. La diferencia de los cuadrados de dos números es 5 y el cociente de los números es 1,5. Calcular esos números.

10. Podemos considerar que una gota de agua tiene forma cúbica cuya arista mide aproximadamente 1 mm = 1 x 10^{-3} mt:
a) Calcular el volumen de una gota.
b) Calcular el número de gotas que caben en un tinaco de 1000 litros.
Resp: a) 1 x 10^{-9} mt^3; b) 1 x 10^9 gotas.

11. Suponiendo que un protón tenga forma cúbica, cuya arista sea de 10^{-13} cm, calcule su volumen.
Resp: 10^{-39}.

12. Considerando que la masa de un protón es de 10^{-24} gramos, determine su densidad (la densidad de un cuerpo se obtiene al dividir su masa entre su volumen).
Resp: 10^{15} cm.

13. Al colocar con mucho cuidado sobre una superficie libre de un recipiente con agua, una gota de aceite cuyo volumen es $V = 6\text{x}10^{-2}$ cm^3, la misma se dispersa y forma una capa muy fina cuya área es $A = 2\text{x}10^4$ cm^2. Calcule el espesor de esta lámina de aceite.
Resp: 3 x 10^{-6} cm.

14. Si V es directamente proporcional a m e inversamente al cuadrado de t, calcular $\lambda V = 2$ cuando $m = 15$ y $t = 6$.

15. v es directamente proporcional a d^2. Si $C = 80$ cuando $d = 12$, Hallar C cuando $d = 15$.

16. R es directamente proporcional a la cuarta potencia de T e inversamente a la raíz cuadrada de N. Calcular λ si $R = \frac{1}{3}$ cuando $T = 2$ y $N = 36$.

17. La variable M es directamente proporcional a d^2. Si $M = 12$ gr cuando $d = 8$ cm, calcular M cuando $d = 12$ cm.

18. La variable N es inversamente proporcional a d^2. Si $N = 10{,}890$ plantas por hectárea cuando las plantas distan $d = 2$ mt, hallar N cuando $d = 5,5$ mt.

19. Si la variable v varía conjuntamente como la raíz cuadrada de g y la raíz cuadrada de h. Si $v = 14$ mt/seg cuando $g = 9,8$ mt/seg^2 y $h = 10$ mt, hallar v cuando $g = 9,81$ mt/seg^2 y $h = 2$ mt.

20. La variable V es directamente proporcional a r^4 y p e inversamente proporcional a l. Si $V = 120$ cuando $r = 0,012$, $p = 20$ y $l = 30$, calcular V cuando $r = 0,015$, $p = 36$ y $l = 25$.

21. La variable a es directamente proporcional a v^2 e inversamente proporcional a r. Si $a = 540$ cuando $v = 84$ y $r = 5$, hallar a cuando $v = 119$ y $r = 4$.

22. Un matraz Erlenmeyer de 250 ml tiene una altura de 12,6 cm^2. ¿Qué altura debería tener otro matraz de la misma forma para que su capacidad sea 500 ml?

23. El análisis de una pintura muestra un 54 % de pigmento y un 46 % de aglomerante. El pigmento está compuesto de 15 % de la sustancia A, 60 % de la sustancia B, y 25 % de la sustancia C. ¿Cuál es el porcentaje de cada sustancia en la pintura?

24. Se recorta de un mapa el perfil de una finca y se encuentra que pesa 42,78 gr. Una sección rectangular de 12,2 por 20,2 cm, del mismo mapa, pesa 5,31 gr. Si la escala del mapa es de 2,5 cm por 50 mt, hallar el área de la finca en metros cuadrados.

25. Para abastecer de agua a una ciudad de 50.000 habitantes se usa un tubo de 62 cm de diámetro. Si se espera alcanzar una población de 120.000 individuos en un tiempo de 30 años, ¿qué diámetro debe tener la nueva tubería?

26. La potencia necesaria para impulsar una lancha es proporcional al cubo de su velocidad. Si un motor de 5 HP permite alcanzar una velocidad de 16 km/h, ¿qué potencia se necesitaría para conseguir una velocidad de 22 km/h?

27. Se compra un lote de sosa, que contiene 52 % en peso de agua de cristalización, a 17,5 centavos por libra. Cuando se vende al por menor, se encuentra que el contenido en agua a descendido a 37 %. ¿Cuál debe ser el precio de venta para obtener una ganancia de un 40 %?

4.12. Regla de tres y porcentajes

La regla de tres es una operación que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen tres. En una regla de tres, siempre debe existir un supuesto y pregunta.

En una regla de tres el supuesto está constituido por los datos de la parte del problema que ya se conoce y la pregunta por los datos de la parte del problema que contiene la incógnita.

De acuerdo a la relación con la incógnita, puede ser directa cuando los aumentos en una variable provocan aumento en la otra variable o inversa cuando los aumentos en una variable provocan disminución en la otra variable.

4.12.1. Regla de tres simple

Los problemas en los que los elementos mantienen una relación proporcional directa o inversa, se resuelven mediante la regla de tres simple. Es simple cuando solamente intervienen en ella dos magnitudes, esta a su vez puede ser:

1. Regla de tres simple directa: La regla de tres simple directa es una relación que se establece entre tres o más valores conocidos y una incógnita. Normalmente se usa cuando se puede establecer una relación de linealidad entre todos los valores involucrados. Normalmente se representa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & A \quad \longrightarrow \quad B \\ \text{Pregunta}: & C \quad \longrightarrow \quad x \end{cases}$$

$$Ax = BC \quad \Rightarrow \quad x = \frac{BC}{A}.$$

Siendo A, B y C valores conocidos y x la incógnita cuyo valor queremos averiguar. Esto se lee de la siguiente forma: x es a C como A es a B.

Ejemplo 4.48 *Si 5 teléfonos cuestan 150 dólares, ¿cuánto costarán 25 teléfonos?*
Solución
Estas cantidades son directamente proporcionales y sabemos que la proporción se forma igualando las razones directas:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & 5 & \longrightarrow & 150 \\ \text{Pregunta}: & 25 & \longrightarrow & x \end{cases}$$

$$x = \frac{25 \cdot 150}{5} = 750 \text{ dólares.}$$

2. Regla de tres simple inversa: Cuando la cantidad aumenta y la otra disminuye proporcionalmente se dice que existe una relación inversa. Esta es una regla de tres simple inversa. En las reglas de tres inversas las relaciones se establecen entre pares de cantidades que van de más a menos o de menos a más:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & A & \longrightarrow & B \\ \text{Pregunta}: & C & \longrightarrow & x \end{cases}$$

$$Cx = AB \quad \Rightarrow \quad x = \frac{AB}{C}.$$

Ejemplo 4.49 *Si 5 personas realizan una labor en 8 días, ¿en cuántos días podrían hacer la misma tarea 12 personas?*
Solución
A más personas, menos días. Estas cantidades son inversamente proporcionales y sabemos que la proporción se forma igualando la razón directa de las dos primeras con la razón inversa de las dos últimas o viceversa:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & 5 & \longrightarrow & 8 \\ \text{Pregunta}: & 12 & \longrightarrow & x \end{cases}$$

$$x = \frac{5 \cdot 8}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ días.}$$

4.12.2. Regla de tres compuesta

Cuando la cantidad de magnitudes que aparece en un problema es mayor que dos, nos enfrentamos a un problema que se puede resolver mediante una regla de tres compuesta. Estos problemas son equivalentes a varios problemas de regla de tres simple encadenados. De acuerdo a si las magnitudes de cada uno de ellos son directa o inversamente proporcionales, encontraremos tres casos:

1. Regla de tres compuesta directa: Si cada una de las magnitudes que aparecen es directamente proporcional a la magnitud de la cantidad que se quiere calcular, el problema se llama regla de tres compuesta directa.

Ejemplo 4.50 *Un paseo de fin de año para 30 personas por 15 días cuesta 65700 dólares. ¿Cuánto costará en iguales condiciones, el paseo a 25 personas, durante 8 días?*
Solución
Para resolver una regla de tres compuesta se consideran, consecutivamente, dos reglas de tres simples. Procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & 30 & \longrightarrow & 67500 \\ \text{Pregunta}: & 25 & \longrightarrow & x \end{cases}$$

$$x = \frac{25 \cdot 67500}{30} = 56250 \text{ dólares.}$$

Al plantear la segunda regla de tres simple aparece como dato $x = 56250$ dólares hallados en la primera regla de tres:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & 15 & \longrightarrow & 56250 \\ \text{Pregunta}: & 8 & \longrightarrow & x \end{cases}$$

$$x = \frac{8 \cdot 56250}{15} = 30000 \text{ dólares.}$$

Este problema también se puede resolver de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{Supto}: \ 30 \text{ pers} \longrightarrow 15 \text{ días} \longrightarrow \$\ 67500 \\ \text{Pregta}: \ 25 \text{ pers} \longrightarrow 8 \text{ días} \longrightarrow \$\ x \end{cases}$$

$$x = \frac{25 \cdot 8 \cdot 67500}{30 \cdot 15} = 30000 \text{ dólares.}$$

Es decir, el paseo les costará a las 25 personas, durante 8 días, 30000 dólares.

2. Regla de tres compuesta inversa: La regla de tres simple inversa es un método para hallar una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos o más magnitudes inversamente proporcionales. Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una cantidad, disminuye la otra.

Ejemplo 4.51 *5 obreros trabajando 8 horas diarias han realizado 150 metros de una obra en 5 días. ¿Cuántos días necesitarán 8 obreros, trabajando 8 horas diarias, para hacer 120 metros de la misma obra?*

Solución

Para resolver este problema, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \text{Supuesto}: & (+)5 \text{ obr.} & \longrightarrow & (+)8 \text{ h.d.} & \longrightarrow & (-)150 \text{ mt.} & \longrightarrow & (+)5 \text{ días} \\ \text{Pregunta}: & (-)8 \text{ obr.} & \longrightarrow & (-)8 \text{ h.d.} & \longrightarrow & (+)120 \text{ mt.} & \longrightarrow & x \text{ días} \end{cases}$$

De esta manera obtenemos:

$$x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 120}{8 \cdot 8 \cdot 150} = 2\frac{1}{2} \text{ días.}$$

3. Regla de tres compuesta mixta: Si hay algunas directas y otras inversamente proporcionales a la de la incógnita, se llama regla de tres compuesta mixta.

La regla de tres compuesta, también se puede solucionar por el método de las proporciones que consiste en descomponer la regla de tres compuesta en reglas de tres simples y luego multiplicar ordenadamente las proporciones formadas. Al formar cada regla de tres simple, se considera que las demás magnitudes no varían.

4.12.3. Porcentajes

Los problemas del tanto por ciento, se resuelven ya sea aplicando regla de tres o por medio de fracciones. Un porcentaje es una forma de expresar una proporción o fracción como una fracción de denominador 100.

La expresión p por ciento de a significa p centésimos de a, es decir

$$\frac{p}{100} \text{ x } a = p \text{ x } \frac{a}{100}$$

El p por ciento de a se denota también por el signo $p\,\%$ de a. El porcentaje aparece en la vida diaria, en el comercio, en las ciencias naturales, etc., y su símbolo es $\%$.

Ejemplo 4.52 *Determine el 65 % de 32000.*
Solución
Procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 100 & \longrightarrow \quad 32000 \\ 65 & \longrightarrow \quad x \end{cases}$$

$$x = \frac{65 \cdot 32000}{100} = 20800.$$

Es decir, el 65 % de 32000 es 20800.

Ejemplo 4.53 *Tenemos una receta para hacer pastel de 1 kg. pero queremos hacer uno de 1,5 kg. Si la receta original dice que debemos usar $\frac{2}{3}$ de tazas de azúcar. ¿Cuál será la cantidad de azúcar que debemos usar ahora?*
Solución
Si a un kilogramo de pastel le asociamos el $100\,\%$, entonces medio kilogramo corresponde al $50\,\%$, lo que indica que la cantidad de azúcar usada sería

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot 100\,\% + \frac{2}{3} \cdot 50\,\% &= \frac{2}{3} \cdot \frac{50}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{50}{100} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1. \end{aligned}$$

Es decir, debemos usar 1 taza de azúcar.

Ejemplo 4.54 *Una barra de metal de 5 kg. tiene 2 kg. de bronce y 3 kg. de aluminio:*
a) *Determine la cantidad de cobre y estaño en la barra si se sabe que el bronce es una aleación con $70\,\%$ de cobre y $30\,\%$ de estaño.*
b) *¿Qué porcentaje de cobre tiene la barra de metal?*
Solución
a) En virtud de que la barra tiene 2 kg. de bronce, entonces, en la barra hay, (2 kg.)(0,7) $=$ 1,4 kg. de cobre y (2 kg.)(0,3) $=$ 0,6 kg. de estaño.
b) En la barra de 5 kg. hay 1,4 kg. de cobre. Por tanto, en la barra hay $\frac{1{,}4}{5} \cdot 100 = 0,28 \cdot 100 = 28\,\%$ de cobre.

Ejemplo 4.55 *La superficie de nuestro planeta consta de $70\,\%$ de agua y $30\,\%$ de tierra. De este último $30\,\%$, $\frac{2}{5}$ partes es cultivable. ¿Qué porcentaje de la superficie total del planeta es cultivable?*

Solución
Sea T la superficie total del planeta. Entonces, $0,3T$ es tierra, de la cual $\frac{2}{5} \cdot 0,3T = 0,12T$ es cultivable. Por lo tanto, el porcentaje del planeta cultivable es

$$\frac{0,12T}{T} \cdot 100 = 0,12 \cdot 100 = 12\,\%.$$

Ejemplo 4.56 *Cuando una persona pide dinero prestado debe pagar un interés durante el tiempo que dura el préstamo, denotémoslo por i. El capital es la cantidad que se presta denotado por c. La tasa o rédito, es el tanto por ciento que se paga en un tiempo determinado, r. El tiempo que dura el préstamo lo denotaremos por t. Se tiene la relación $i = crt$:*
a) *¿Cuál es el interés que se debe pagar por un préstamo de \$400 durante 5 meses si el rédito es 2 % mensual?*
b) *¿Cuál es el interés que se debe pagar por un préstamo de \$400 durante 3 meses, si la tasa es de 24 % anual?*
c) *Nos prestan \$500 con interés mensual del 2 %. ¿Cuánto pagaremos a fin de mes para liquidar completamente la deuda?*
Solución
a) $i = crt = 400 \cdot 0,02 \cdot 5 = 40$ dólares.
b) $i = crt = 400 \cdot 0,24 \cdot \frac{3}{12} = 24$ dólares.
c) El interés a pagar es $i = crt = 500 \cdot 0,02 \cdot 1 = 10$ dólares. Por lo tanto, para liquidar la deuda debemos pagar $500 + 10 = 510$ dólares.

Ejemplo 4.57 *Si el radio del cilindro disminuye en un 10 % mientras que su altura aumenta en un 12 % en qué tanto porciento varían:*
a) *El volumen del cilindro.*
b) *El área lateral del cilindro.*
Solución
Sea r: radio inicial del cilindro, h: altura inicial del cilindro
a) Si el radio disminuye en un 10 % entonces el nuevo radio R será

$$R = r - 0,1r = 0,9r$$

Si la altura aumenta en un 12 % entonces la nueva altura H será

$$H = h + 0,12h = 1,12h$$

luego el nuevo volumen será

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 H \\ &= \pi(0,9r)^2(1,12h)^2 \\ &= 0,9072\pi r^2 h \\ &= \pi r^2 h - 0,0928\pi r^2 h \end{aligned}$$

esto es, el volumen disminuye en $0,0928\pi r^2 h$ unidades; es decir, disminuye en 9,28 %.
b) El área del cilindro será

$$\begin{aligned} A &= 2\pi RH \\ &= 2\pi(0,9r)(1,12h) \\ &= 1,008(2\pi rh) \\ &= 2\pi rh + 0,008(2\pi rh) \end{aligned}$$

luego el área lateral aumenta en 0,8 %.

4.13. Tarea

Regla de tres simple, directa e inversa

1. En 50 litros de agua de mar hay 1300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 1000 gramos de sal?

2. Un auto consume 2 galones de gasolina cada 100 kilómetros. Si quedan en el depósito 2 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros recorrerá el auto?

3. Un ganadero tiene comida suficiente para alimentar 150 vacas durante 15 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de comida a 200 vacas?

4. Para envasar cierta cantidad de ron se necesitan 10 toneles de 150 litros de capacidad cada uno. Se desea envasar la misma cantidad de ron empleando 12 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

5. Un avión tarda 2 minutos para recorrer 4,5 kilómetros. ¿Cuánto tarda en recorrer con la misma velocidad 150 kilómetros?

6. Un obrero gana 25 dólares por 8 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo ha trabajado para ganar 110 dólares?

7. Se compra 15 metros de cinta a 0,18 dólares el metro. ¿Cuántos metros de otra cinta de 0,12 dólares el metro se puede comprar con el mismo dinero?

8. En un día de trabajo de 8 horas, un obrero ha hecho 10 cajas. ¿Cuántas horas tardará en hacer 25 de esas mismas cajas?

9. El jugo de naranja de una cierta marca viene en latas de 220 cm^3 y cuesta 0,33 dólares, el de otra marca viene en latas de 250 cm^3 y cuesta 0,40 dólares. ¿Cuál resulta más barato?

10. Ocho obreros han tardado 24 horas para realizar cierto trabajo. ¿Cuánto tiempo hubiesen empleado para hacer el mismo trabajo 4 obreros?

11. ¿Cuál será la altura de una columna que produce una sombra de 4,5 metros, sabiendo que a la misma hora una varilla vertical de 0,49 metros arroja una sombra de 0,63 metros?

12. Un comerciante compró 33 kg de arroz a razón de 0,90 dólares el kg. ¿Cuántos kg de arroz de 1,10 dólares podría haber comprado con esa misma suma de dinero?

13. Un alimento para perros se vendía en paquetes de 800 gramos a 48 dólares, y ahora se vende en paquetes de 2 kilogramos a 1,12 dólares. ¿Aumentó o rebajo el precio del kilogramo? ¿Cuánto fue el aumento o la disminución?

14. Se filma un partido de fútbol de modo tal que la cámara capte 48 imágenes en 3 segundos; la otra cámara capta 450 imágenes en 0.5 minuto. ¿Cuál filmación resulta más lenta? ¿Cuántas imágenes por segundo filma la segunda cámara?

15. Si para pintar 180 m^2 se necesitan 24 kg de pintura, ¿cuántos kg se necesitarán para pintar una superficie rectangular de 12 m de largo por 10 m de ancho?

16. Para hacer 96 m^2 de un cierto género se necesitan 30 kg de lana; ¿cuántos kg se necesitarán para tejer una pieza de 0,90 m de ancho por 45 m de largo?

17. La longitud de los $\frac{4}{5}$ de un camino es de 550,20 m. ¿Cuál es la longitud del camino?

18. Un trabajo puede ser realizado por 80 obreros en 42 días. Si el plazo para terminarlo es de 30 días, ¿cuántos obreros deberán aumentarse?

19. A razón de 70 km por hora un automovilista emplea 2 horas 30 minutos para recorrer cierta distancia. ¿Qué tiempo empleará para recorrer la misma distancia a razón de 45 km por hora?

20. Cinco motores consumen 7200 kg de combustible en 42 horas de funcionamiento; ¿para cuántas horas alcanzará esa misma cantidad de combustible, si funcionan sólo 3 de esos motores?

21. Con 15 kg de algodón se teje una tela de 120 m de largo y 95 cm de ancho; ¿qué largo tendrá una tela de igual calidad que la anterior de 90 cm de ancho tejida con la misma cantidad de algodón?

22. Un automóvil recorre 100 km en 1 h 32 m. ¿En qué tiempo recorrerá 60 km?

23. Doce obreros han hecho la mitad de un trabajo en 18 horas. A esa altura de la obra 4 obreros abandonan el trabajo. ¿Cuántas horas tardan en terminarlo los obreros que quedan?

24. Para empapelar una habitación se necesitan 15 rollos de papel de 0,45 m de ancho. ¿Cuántos rollos se necesitarán, si el ancho fuera de 0,75 m?

25. Si 65 hectáreas producen 2920 kg de trigo. ¿Cuántos kg producirán 2340 hectáreas de la misma calidad de tierra?

26. Con 15 kg de hierro se han hecho 420 tuercas de 4 pulgadas. ¿Cuántas tuercas semejantes a las anteriores, pero de 3 pulgadas, se pueden hacer con la misma cantidad de hierro?

27. Un ganadero tiene 36 ovejas y alimento para ellas por el término de 28 días. Con 20 ovejas más, sin disminuir la ración diaria y sin agregar forraje, ¿durante cuántos días podrá alimentarlas?

28. Si los $\frac{3}{5}$ de un campo tienen una superficie de 25,20 hectáreas. ¿Cuál es la superficie del campo expresada en m^2.

Regla de tres compuesta, directa, inversa y mixta

1. Para construir una autista de 8 kilómetros, se emplearon 40 operarios por 60 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán 35 operarios trabajando 8 horas diarias en construir 5 kilómetros?

2. Una familia compuesta de 6 personas consume en 2 días 3 kg de pan, ¿cuántos kg de pan serán consumidos en 5 días, estando dos personas ausentes?

3. Con 9 arados de disco se rotulan 36.9 hectáreas en 48 horas, ¿cuántas hectáreas se rotularán con 15 arados en 120 horas?

4. Para cavar una zanja de 78 m de largo, 9° cm de ancho y 75 cm de profundidad, se necesitan 39 obreros, ¿cuántos obreros habrá que disminuir para hacer en el mismo tiempo una zanja de 60 m de largo, 0,50 m de ancho y 45 cm de profundidad?

5. En un colegio con 120 alumnos pupilos se han gastado en manutención 120 dólares durante 6 días. Habiendo disminuido el número de alumnos en $\frac{1}{3}$, ¿cuánto se gastará durante un mes de 30 días?

Porcentajes

1. En cierto país, la población masculina representa el 48 % y una de cada 7 mujeres tiene el hábito de fumar. Supongamos que la población es de 100.000.000 de habitantes:
a) ¿Cuántas mujeres fumadoras hay?
b) ¿Qué porcentaje de la población representan las mujeres fumadoras?
Resp: a) 7600.000; b) 7,6 %.

2. La población de un cultivo de bacterias aumenta 10 % en la primera hora y disminuye el mismo porcentaje en la segunda hora. Si la población original era de 5500:
a) Calcule el número de bacterias después de dos horas.
b) ¿Qué porcentaje representa de la población original?
Resp: a) 5445; b) 99 %.

3. Al analizar una pintura se encontró con un 55 % de colorante y con un 45 % de aglomerante. El colorante está compuesto de 20 % del material A, 55 % del material B y 25 % del material C. ¿Cuál es el porcentaje de cada material en la pintura analizada?
Resp: Hay 11 % de material A, 30 % del material B y 13 % del material C.

4. Un material se desintegra de tal forma que cada 100 años se consume el $0,8$ % de la cantidad que queda por desintegrarse. Si en el año 2000 se tienen 600 kg. de tal material:
a) ¿Qué cantidad se tendría en 2101?
b) ¿Qué cantidad se tendría en 2201?
c) ¿Qué cantidad se tendría en 2501?
d) ¿Qué cantidad se tendría en 2901?
Resp: a) 595,2 kg; b) 590,4 kg; c) 576,3 kg; d) 558,1 kg.

Capítulo 5

Polinomios

5.1. Definiciones generales

Definición 5.1 Polinomio
Una expresión racional en la que se prevén solamente dos operaciones respecto de las letras que lo integran, a saber, multiplicación y elevación a potencia natural, se denomina monomio. Una expresión racional se denominará polinomio, si es entera respecto de toda letra que figura en dicha expresión. En particular, una expresión racional que contiene una sola letra y que es entera respecto de esta letra, se denomina polinomio entero respecto de una letra. El grado, es la mínima expresión algebraica formada por un solo término algebraico.

De la definición de polinomio y de las reglas que rigen las operaciones sobre expresiones algebraicas se desprende que la suma, la diferencia y el producto de dos polinomios serán polinomios. Por regla general, los monomios se transforman idénticamente conforme a determinadas leyes de operaciones, reuniendo juntos todos los números que integran el monomio y escribiéndolos ante las letras del monomio, y también, reuniendo juntas las letras iguales que integran el monomio y escribiéndolas en forma de una potencia natural de dicha letra. Realizada tal transformación, un monomio se considera escrito en la forma estándar, mientras que el factor numérico que precede a las letras del monomio se denomina coeficiente del monomio dado.

Cuando varios números están sometidos a operaciones enteras: suma, resta y multiplicación, la expresión se llama entera. Toda expresión entera puede reducirse a un monomio o a una suma de monomios, que llamaremos polinomio.

Según las reglas de operaciones sobre las expresiones algebraicas, todo polinomio siempre puede transformarse en una forma en la que el polinomio se componga de varios monomios escritos en la forma estándar y unidos entre sí mediante los signos de adición y de sustracción; por esta razón se dice que un polinomio es la suma algebraica de monomios.

Los términos semejantes de un polinomio son sus monomios escritos en forma estándar y que se diferencian en nada más que los coeficientes. Reducir los términos semejantes de un polinomio significa sustituir la suma algebraica de los términos semejantes por un solo término idénticamente igual a dicha suma.

Un polinomio en x es una expresión algebraica de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Es una suma formal de $n+1$ términos, siendo el primero a_0. El símbolo n representa un entero que es positivo o cero. El término $a_i x^i$ se denomina término general del polinomio y es el término i. El primer término a_0 se llama término constante de $p(x)$ y ajusta la fórmula para el término general si se acuerda identificar x^0 con 1, a_n con $a_n x^n$. Los símbolos a_0, a_1, ..., a_n se llaman coeficientes de $p(x)$.

Los polinomios se clasifican en ordenados y desordenados, completos e incompletos, homogéneos y heterogéneos. Es decir:

1. **Polinomio ordenado**: Un polinomio ordenado respecto a una de sus letras, es aquel en que el exponente de la letra llamada ordenatriz es constantemente mayor o menor en cada termino que en el que le precede, si no lo tiene igual.

2. **Polinomio desordenado**: Un polinomio desordenado es aquel que no presenta este requisito. La ordenación de un polinomio puede ser ascendente o descendente, según que los exponentes de la letra ordenatriz vayan aumentando o disminuyendo, desde el primero al último.

3. **Polinomio completo**: Un polinomio completo respecto a una de sus letras, es aquel en el que existen todos los sucesivos exponentes de ella, desde el mayor hasta el cero, que corresponde al término independiente de la letra. Polinomio incompleto es aquel en el que falta alguno o algunos de los términos. Las propiedades de un polinomio completo son las siguientes:

    a) Si el polinomio es de grado n, entonces el número de términos es igual a $n+1$.

    b) El grado del polinomio completo es igual al número de términos menos 1.

    c) La diferencia de grados relativos de dos términos consecutivos es igual a la unidad.

    d) El término independiente contiene a la variable con exponente cero.

4. **Polinomio homogéneo**: Un polinomio homogéneo es el que tiene todos sus términos del mismo grado, llamado grado de homogeneidad.

Definición 5.2 Polinomio nulo
Cuando los coeficientes de un polinomio son todos cero, se le llama polinomio nulo. Se conviene en que todos estos polinomios son iguales y se identifican con el número cero.

Definición 5.3 Polinomios iguales
Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios arbitrarios, se pueden agregar, de ser necesario, términos con coeficientes cero a uno de ellos y escribir entonces ambos polinomios como en la fórmula general y con la misma n. Entonces se conviene en que, por definición, dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son iguales si los coeficientes correspondientes son números iguales.

Si $p(x)$ no es el polinomio cero, tiene por lo menos un coeficiente distinto de cero. Se pueden entonces borrar sucesivamente aquellos términos primeros que tengan coeficiente cero hasta llegar a un nuevo término primero con coeficientes distintos de cero. Esto permite escribir cualquier polinomio como en la fórmula general con $a_n \neq 0$. Cuando es así, se dice que a_n es el coeficiente final de $p(x)$ y n es el grado de $p(x)$.

Un polinomio como el de la fórmula general con $n = 0$ se reduce a su primero (y último) término $a_0 x^0 = a_0 = a_n$. Se le llama un polinomio constante. Se le da el grado cero aun en el caso que sea el polinomio cero. Se hará referencia algunas veces a los polinomios de grado $n > 0$ como a polinomios no constantes.

Un polinomio de grado $n = 1, 2, 3, 4$, se puede también llamar polinomio lineal, cuadrático, cúbico y cuártico respectivamente.

5.2. Suma, resta y producto de polinomios

En virtud de las reglas de operaciones con las expresiones algebraicas podemos concretar las leyes que rigen las operaciones sobre los polinomios de la siguiente manera:

Definición 5.4 Suma de polinomios
Para adicionar dos polinomios, se deben escribir todos los términos seguidos del primer polinomio y, luego, todos los términos del segundo polinomio, conservando para cada monomio el signo que está delante de su coeficiente después de lo cual es necesario reducir los términos semejantes.

Definición 5.5 Resta de polinomios
Para sustraer de un polinomio otro polinomio, se deben escribir todos los términos seguidos del primer polinomio, conservando inalterable el signo de cada monomio que está delante de su coeficiente, a continuación se escriben todos los términos del segundo polinomio, cambiando por opuestos todos los signos que están delante de los coeficientes de los monomios del segundo polinomio, después de lo cual es necesario reducir los términos semejantes.

Los polinomios se suman sumando los coeficientes correspondientes y se restan restando los coeficientes correspondientes.

Si n es el mayor de los grados de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, se puede escribir

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

y

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$$

Si tienen grado distinto, uno de los coeficientes a_n y b_n es cero. Cuando se han escrito así, se tiene

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_n + b_n)x^n$$

Estos son polinomios cuyo grado no es mayor que n.

El resultado obtenido puede extenderse a sumas de varios polinomios y enunciarse de la siguiente manera: *El grado de una suma de polinomios no es mayor que el mayor de los grados de todos los polinomios que se suman.*

Esto no solamente es válido para sumas sino también para diferencias. En realidad vale para sumas de múltiples constantes de polinomios.

$$p(x) - q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + (a_n - b_n)x^n$$

Supresión de signos:
1.- Cuando el signo está precedido del signo +, se elimina este signo sin producir ningún cambio.
2.- Cuando está precedido del signo -, se elimina el signo cambiando todos los signos de suma o resta que se encuentra dentro de él.
3.- Cuando tiene que ir precedido del signo +, se escribe el signo sin realizar ningún cambio.

4.- Cuando tiene que ir precedido del signo -, se escribe el signo, cambiando los signos de suma y de resta de todos los términos que se introduce.

Ejemplo 5.1 *Súmense y réstense los polinomios*

$$p(x) = 3x^5 - 4x^2 + 2x + 1 \quad y \quad q(x) = -2x^4 + 5x^3 + 3x - 2$$

Solución
Para sumar los polinomios, hacemos

$$\begin{array}{cccccc}
3 & +0 & +0 & -4 & +2 & +1 \\
0 & -2 & +5 & +0 & +3 & -2 \\
\hline
3 & -2 & +5 & -4 & +5 & -1
\end{array}$$

El polinomio resultante es $p(x) + q(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.
Para restar los polinomios, hacemos

$$\begin{array}{cccccc}
3 & +0 & +0 & -4 & +2 & +1 \\
0 & +2 & -5 & +0 & -3 & +2 \\
\hline
3 & +2 & -5 & -4 & -5 & +3
\end{array}$$

El polinomio resultante es $p(x) - q(x) = 3x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 - x + 3$.

El producto de

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

de grado n y

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m$$

de grado m es la suma de todos los productos $(a_i x^i)(b_j x^j) = a_i b_j x^{i+j}$. Todos los términos con el mismo exponente para x se combinan sumando sus coeficientes. Si $p(x)$ o $q(x)$ es el polinomio cero, su producto es cero. En caso contrario $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ y $p(x)q(x)$ tiene precisamente un término de grado $n + m$, a saber, $a_n b_m x^{n+m}$. Este es el término de máximo grado y resulta que el grado de $p(x)q(x)$ es $n + m$.

Definición 5.6 Producto de polinomios
Para multiplicar un monomio por un polinomio, se debe multiplicar dicho monomio por cada termino del polinomio, escribir los términos segundos del producto con aquellos signos que tenían los términos del polinomio, si delante del coeficiente del monomio esta el signo mas, y con los signos opuestos, si el coeficiente del monomio tiene el signo menos, a continuación se debe escribir en la forma estándar cada monomio del producto y reducir los términos semejantes. Si el polinomio no admite reducción, tampoco habrá términos semejantes en el producto, que será otro polinomio de igual número de términos.

Este resultado es válido para los productos de varios polinomios. Los polinomios que se multiplican factores y se enuncia el resultado de la siguiente manera.

Teorema 5.1 *El grado de un producto de polinomios distintos de cero es igual a la suma de los grados de sus factores. El coeficiente inicial de cualquier producto es igual al producto de los coeficientes iniciales de los productos, y el término constante de un producto es igual al producto de los términos constantes de sus factores. El producto de polinomios distintos de cero es distinto de cero y es una constante si y sólo si todos sus factores son constantes.*

El grado de un producto es la suma de los grados. Estos grados son todos números naturales y su suma puede ser cero únicamente cuando los grados que se sumen sean cero todos, es decir, los factores son constantes.

El producto de un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ por un polinomio constante k es

$$kp(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + ... + ka_{n-1}x^{n-1} + ka_nx^n$$

En particular

$$(-1)p(x) = (-a_0) + (-a_1x) + (-a_2x^2) + ... + (-a_{n-1}x^{n-1}) + (-a_nx^n)$$

y cualquier diferencia

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-1)q(x)$$

Se puede ahora establecer que cualquier expresión algebraica obtenida mediante la aplicación a x y a las constantes, de un número finito de operaciones enteras de adición, sustracción y multiplicación es un polinomio en x. También se dan las definiciones de suma y multiplicación de polinomios de manera que se satisfacen las leyes para las operaciones enteras y para los exponentes enteros no negativos. Entonces resultará cierto que si se sustituye x por cualquier número en dos expresiones formalmente distintas del mismo polinomio, los números resultantes serán un mismo número.

Ejemplo 5.2 *Multiplicar los polinomios*

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \quad y \quad q(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4$$

solución
Ubicamos los coeficientes de los polinomios de la siguiente manera, y luego pro-cedemos a multiplicar ordenadamente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & +2 & -3 & +2 & -1 & & & & \\
1 & +3 & -2 & +0 & +4 & & & & \\
0 & +2 & -3 & +2 & -1 & & & & \\
 & 0 & +6 & -9 & +6 & -3 & & & \\
 & & 0 & -4 & +6 & -4 & +2 & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & 0 & +8 & -12 & +8 & -4 \\
\hline
0 & +2 & +3 & -11 & +11 & +1 & -10 & +8 & -4
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio resultante tiene la forma

$$p(x)q(x) = 2x^7 + 3x^6 - 11x^5 + 11x^4 + x^3 - 10x^2 + 8x - 4.$$

5.3. Produtos notables

Haciendo uso de las reglas de adición y multiplicación de polinomios y de las propiedades que poseen las igualdades de expresiones algebraicas, obtendremos igualdades idénticas, las cuales se denominan formulas de multiplicación reducida.

En muchos problemas aparecen una y otra vez para ser multiplicados, algunos factores que son expresiones algebraicas de un cierto tipo. En consecuencia, vale la pena aprender a escribir rápidamente los productos. Cuando es necesario calcular varios polinomios, resulta que ciertos tipos de expre-siones figuran con tanta frecuencia que se justifica el desarrollo de fórmulas para el cálculo.

Definición 5.7 Cuadrado de la suma de dos números
El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el producto duplicado del primer número por el segundo, mas el cuadrado del segundo numero:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Definición 5.8 Cuadrado de la diferencia de dos números
El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primer número, menos el producto duplicado del primer número por el segundo, mas el cuadrado del segundo numero:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Definición 5.9 Diferencia entre los cuadrados de dos números
La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto de la diferencia de estos números por la suma de los mismos:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

Definición 5.10 Cubo de la suma de dos números
El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer número, mas el producto triplicado del cuadrado del primer numero por el segundo, mas el pro-ducto triplicado del primer numero por el cuadrado del segundo y mas el cubo del segundo numero:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

De la misma forma, podemos definir las restantes:

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(y^2 + xy + y^2)$$

...

Las fórmulas aducidas permiten observar cierta regularidad con ayuda de la cual podemos escribir la fórmula para $(a \pm b)^n$, donde n es un número natural cualquiera. Es fácil ver que habrá en total $n+1$ términos: El primer término es el primer número a la potencia n; en cada término subsiguiente la potencia del primer número será en una unidad menor que su potencia en el término antecedente, y en el último término la potencia del primer número es nula; el segundo número tiene en el primer término la potencia nula, en el segundo término, la primera potencia, en cada término subsiguiente la potencia del segundo número será en una unidad mayor que su potencia en el término antecedente, y en el último término el segundo número figura a la potencia n.

El coeficiente de cada termino puede hallarse con ayuda del triangulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & &
\end{array}$$

Es simple la regla conforme a la cual se forman las líneas del triangulo de Pascal. Cada línea puede obtenerse de la línea superior anterior del modo siguiente: En el intervalo entre cualesquiera números vecinos de la línea superior, pero más abajo, se escribe la suma de estos, y en los extremos se ponen las unidades. El numero de la línea enseña a que potencia se eleva el binomio $a+b$, mientras que los números de dicha línea son los coeficientes de los términos correspondientes escritos en el orden estudiado mas arriba.

Si se necesita escribir la formula para $(a+b)^n$, donde n es un numero grande, esta claro que el calculo de los coeficientes del segundo miembro con ayuda del triangulo de Pascal será engorroso, razón por la cual resulta deseable conocer otra formula para calcular $(a+b)^n$. Tal formula existe y lleva el nombre de binomio de Newton, teniendo por expresión

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n}b^n$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$ para cualquier k natural. De la formula para el binomio de Newton se deduce fácilmente la formula $(a-b)^n$. Denotemos $d = -b$ y apliquemos la formula del binomio de Newton:

$$(a-b)^n = (a+d)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}d + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}d^k + ... + \binom{n}{n}d^n$$

Sustituyendo $-b$ por d, obtenemos

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

En una serie de problemas, al operar con polinomios, resulta más fácil examinarlo no en la forma estándar, sino en forma de un producto. La transformación idéntica de un polinomio en la forma de un producto de polinomios se llama descomposición del polinomio en factores. En forma general todas las formulas de multiplicación reducida son precisamente formulas que rigen la descomposición del polinomio en factores. Además de la aplicación de las formulas de multiplicación reducida existen también otros procedimientos para descomponer los polinomios en factores, por ejemplo, la agrupación o procedimiento consistente en sacar el factor común del paréntesis. Para descomponer un polinomio en factores son útiles todos los procedimientos.

Hay un procedimiento ligeramente distinto del que se acaba de usar para calcular polinomios. Difiere principalmente en la forma de seleccionar y ordenar los términos. Es un método valioso para ahorrar lugar y tiempo. A este procedimiento se le puede llamar procedimiento del exponente fijo. Se selecciona un exponente fijo i y se calculan todos los coeficientes de la potencia x^i que hay en los términos cuya suma es $p(x)$. Entonces la suma de estos coeficientes es el coeficiente de x^i en $p(x)$. El procedimiento empieza con la determinación del coeficiente de la potencia máxima de x que aparece en todos los términos de $p(x)$. Este coeficiente será el coeficiente inicial de $p(x)$ a menos que sea cero. El procesamiento termina con el cálculo de $a_0 = p(0)$.

Ejemplo 5.3 *Calcular*

$$p(x) = (3x-2)^2(x+1) - x(2x+1)(2x-1) - 5(x+1)x^2.$$

Solución
Se escribe

$$p(x) = (9x^2 - 12x + 4)(x+1) - x(4x^2 - 1) - 5x^3 - 5x^2$$

El coeficiente de x^3 es 9 - 4 - 5 = 0, el de x^2 es 9 - 12 - 5 = -8 y el de x es -12 + 4 + 1 = -7. También $p(0) = 4$. Por consiguiente

$$p(x) = -8x^2 - 7x + 4.$$

Encontremos en seguida una regla para escribir con facilidad el cuadrado de un polinomio de tres o más términos.

Definición 5.11 Cuadrado de un polinomio
El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de los términos por separado más el doble de la suma algebraica de los productos obtenidos al multiplicar a cada término por la suma de los términos que lo siguen.

Ejemplo 5.4 *Desarrolle el cuadrado del polinomio*

$$(2x - 3y + z - 2u).$$

Solución
Desarrollamos directamente, aplicando la regla

$$(2x - 3y + z - 2u)^2 = 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 4u^2 - 12xy + 4xz - 8xu - 6yz + 12yu - 4zu.$$

5.4. Tarea

1. Calcule a, b y c para que se verifique la igualdad:

$$(x^3 - 2x + a)(bx + c) = 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2$$

2. Determine la suma y diferencia:

a) $\begin{cases} p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 \\ q(x) = 5x^3 + 3x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2 \\ q(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} p(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3 \\ q(x) = 2x^4 + 5x^2 - 2x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} p(x) = -x^4 - 3x^2 + 5x - 3 \\ q(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3 \\ q(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} p(x) = 6x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 \\ q(x) = x^4 - 12x^2 - 5x + 4 \end{cases}$

Resp: **a)** $3x^4 + 3x^3 + 7x^2$, $3x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x - 4$; **b)** $5x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $-x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + 3$; **c)** $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 6$, $-x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 2x$; **d)** $4x^3 - x^4$, $-x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 100x - 6$; **e)** $2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, $-2x^4 + x^3 - 8x^2 + 13x - 5$; **f)** $7x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 5x + 1$, $5x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 5x - 7$.

3. Dados los polinomios

$$\begin{cases} p(a,b) = 3a^2b - 5ab^2 - 2a^2 \\ q(a,b) = 4a2b - ab^2 - b^2 \\ r(a,b) = 8a^2b + 5a^2 - 7b^2 \\ h(a,b) = 5ab^2 - 10a^2b + 4a^2 \end{cases}$$

Calcular las siguientes operaciones: **a)** $p+q-r-h$; **b)** $p-\{q-[p+(q+h)-r]\}$.
Resp: **a)** $9a^2b-11a^2-11ab^2+6b^2$; **b)** $-12a^2b-5a^2-5ab^2+7b^2$.

4. Determine los siguientes polinomios:
a) $x(x^2+1)-3x(-x+3)+2(x^2-x)^2$;
b) $2(x^2+3)-2x(x-3)+6(x^2-x-1)$;
c) $(2x^2+x-1)(x-3)-(2x-1)(2x+1)$;
d) $(3x-1)(3x+1)-(4x-3)^2-2(2x^2+16x-16)$.

5. Determine los siguientes polinomios:
a) $p(x)=(3x^2-4x)(x+1)-(2x+1)(x-2)$;
b) $p(x)=(2x+3)(2x-3)x-(2x^2+2x+1)(x-1)$;
c) $p(x)=2x(x^2+2x-1)-(x^2+3x+2)(x-1)$;
d) $p(x)=(2x^2+3x-1)(x^2-2x-2)-x^3(2x-1)$;
e) $p(x)=(x^2-x-1)(x^3+2x+1)+(x+1)(x^3+2)$;
f) $p(x)=(x+1)(x^2+1)-2(2x^2-1)(x-1)+3x^2(x-2)$;
g) $p(x)=3(x-ky)^2+2(x-ky)(kx+y)-4(kx+y)^2$;
h) $p(x)=(x-ky)^2+6(x-ky)(kx+y)-9(kx+y)^2$;
i) $p(x)=-2(x-ky)^2+(x-ky)(kx+y)-3(kx+y)^2$.
Resp: **a)** $p(x)=3x^3+x^2-x-2$; **b)** $p(x)=2x^3-8x+1$; **c)** $p(x)=x^3+2x^2-x+2$; **d)** $p(x)=-11x^2-4x+2$; **e)** $p(x)=x^5+2x^3-x^2-x+1$; **f)** $p(x)=-x^2+3x-1$.

6. Determine el producto de los polinomios:

a) $\begin{cases} p(x)=3x^4-2x^3+4x^2-1 \\ q(x)=5x^3+3x^2-4x+3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} p(x)=2x^4+4x^3-4x^2+2 \\ q(x)=3x^4-2x^2+3x-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} p(x)=x^4-5x^3+2x^2+3 \\ q(x)=2x^4+5x^2-2x+3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} p(x)=-x^4-3x^2+5x-3 \\ q(x)=4x^3+3x^2-5x+3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} p(x)=x^3-5x^2+8x-3 \\ q(x)=2x^4+3x^2-5x+2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} p(x)=6x^4-2x^3+x^2-3 \\ q(x)=x^4-12x^2-5x+4 \end{cases}$

Resp: **a)** $15x^7-x^6+2x^5+29x^4-27x^3+9x^2+4x-3$; **b)** $8x^8+12x^7-16x^6-2x^4+24x^4-16x^3+6x-2$; **c)** $2x^8-10x^7+9x6-27x^5+29x^4-19x^3+21x^2-6x+9$; **d)** $-4x^7-3x^6-7x^5+8x^4+18x^3-43x^2+30x-9$; **e)** $2x^7-10x^6+19x^5-26x^4+51x^3-59x^2+31x-6$; **f)** $6x^8-2x^7-71x^6-6x^5+19x^4-13x^3+40x^2+15x-12$.

7. Efectuar los siguientes productos notables:
a) $(2x^2+3y)(2x^2-3y)$;
b) $(2x+3y)^2$;
c) $(2x+1)(3x+4)(2x+1)(3x+4)$;
d) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$;
e) $(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$;
f) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$;
g) $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$;
h) $(x-a)^2+((x-b)^2+(x-c)^2+x^2$;

i) $3(x-2y)^2+2(x-2y)(x+2y)+(3y-x)(3y+x)-(2x-3y)^2$;
j) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$;
k) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)(8x^3-y^3)$.
Resp: **a)** $4x^4-9y^2$; **b)** $4x^2+12xy+9y^2$; **c)** $36x^4+132x^3+169x^2+88x+16$; **d)** x^3+y^3; **e)** x^6-1; **f)** x^6-1; **g)** x^6-64; **h)** $4x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2$; **i)** $4y^2$; **j)** x^8-y^8; **k)** $64x^6-y^6$.

8. Desarrollar los siguientes binomios:

a) $(x^2+y^3)^6$; **b)** $\left(\frac{1}{2}x^2+y^3\right)^5$; **c)** $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^7$; **d)** $(0,3x^3y^2-ab)^3$.

Resp: **a)** $x^{12}+6x^{10}y^3+15x^8y^6+20x^6y^9+15x^4y^{12}+6x^2y^{15}+y^{18}$;
b) $\frac{1}{32}(x^{10}+10x^8y^3+40x6y^9+80x^2y^{12}+32y^{15})$;
c) $\frac{1}{x^7y^7}(x^7-7xy^6+21x^2y^5-35x^3y^4+35x^4y^3-21x^5y^2+7x^6y-x^7)$;
d) $\frac{1}{1000}(27x^9y6-270abx^6y^4+900a^2b^2x^3y^2-1000a^3b^3)$.

9. Hallar:

a) El tercer término de $(x-y)^5$;
b) El quinto término de $(x^2-2y)^9$;
c) El penúltimo término de $(2x-y^2)^6$;
d) El término central de $(3x^2-y^2)^8$;
e) El coeficiente de x^{21} en $(2x^4-x)^9$;
f) El término central de $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2x}\right)^6$.

Resp: **a)** $-10x^3y^2$; **b)** $2016x^{10}y^9$; **c)** $-12xy^{10}$; **d)** $5670x^8y^8$; **e)** -2016; **f)** -20.

5.5. División de polinomios

5.5.1. Método normal

El algoritmo de la división para los números enteros tiene un análogo para polinomios que se enuncia de la siguiente manera:

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios tales que $q(x)$ no es una constante. Entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que el grado de $r(x)$ es menor que el de $q(x)$ y $p(x)=c(x)q(x)+r(x)$. Cuando el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$, el polinomio $c(x)=0$ y $p(x)=r(x)$. Por otra parte, el grado de $c(x)$ es igual al de $p(x)$ menos el de $q(x)$.

Las siguientes son sus propiedades más importantes:
1.- En toda división, el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.
2.- En toda división el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor.
3.- En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del resto (excepto polinomios homogéneos).
4.- En toda división el grado máximo del resto es igual al grado del divisor menos uno (en el caso de división de polinomios homogéneos, no se cumple esta propiedad).
5.- En el caso de polinomios homogéneos, el grado del resto es mayor que el grado del divisor.

Para dividir dos polinomios se procede en el siguiente orden:

i) Se divide los signos mediante la regla de signos.
ii) Se divide los coeficientes.
iii) Se divide los literales aplicando la teoría de exponentes.

Ejemplo 5.5 *Dividir los monomios:*

$$-16x^4y^8z^5 \quad y \quad 4x^2y^5z^4$$

Solución

$$\frac{-16x^4y^8z^5}{4x^2y^5z^4} = -\frac{16}{4}x^{4-2}y^{8-5}z^{5-4} = -4x^2y^3z.$$

Para dividir polinomios por el método normal, se procede de la siguiente manera:

a) Se ordenan los polinomios, generalmente en forma descendente.
b) Se escribe éstos en línea horizontal, uno a continuación del otro y utilizando el signo de la división aritmética.
c) Se divide el primer término del dividendo, entre el primer término del divisor, lo cual da el primer término del cociente.
d) Este primer término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se resta de los correspondientes términos del dividendo (se cambian de signo los productos).
e) Se incorpora al residuo, el siguiente término del divisor. Se divide el primer término del resto obtenido, entre el primer término del divisor y se obtiene el segundo término del cociente.
f) Se procede como en el paso 4, y así sucesivamente, hasta terminar la división.

Ejemplo 5.6 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x2 + 3x - 1$$

entre

$$q(x) = x^2 - 3x + 4$$

Solución
Aplicando los pasos enunciados anteriormente, obtenemos:

$$\begin{array}{c|c}
2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & x^2 - 3x + 4 \\
-2x^5 + 6x^4 - 8x^3 & 2x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\hline
2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & \\
-2x^4 + 6x^3 - 8x^2 & \\
\hline
x^3 - 10x^2 + 3x - 1 & \\
-x^3 + 3x^2 - 4x & \\
\hline
-7x^2 - x - 1 & \\
7x^2 - 21x + 28 & \\
\hline
-22x + 27 &
\end{array}$$

El cociente es: $c(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 7$
El resto es: $r(x) = -22x + 27$.

5.5.2. Método de coeficientes separados

Además de las consideraciones del método normal, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

a) Se trabaja solamente con los coeficientes y sus signos.

b) En caso de faltar un término, se coloca en su lugar cero, tanto en el dividendo como en el divisor.

c) Se procede a dividir estos coeficientes siguiendo los pasos del método normal, de esta manera se obtiene los coeficientes del cociente con sus signos.

d) Para determinar el grado del cociente y el resto se aplica las siguientes propiedades:

i) El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

ii) El grado del resto es igual al grado del divisor menos uno.

e) Este método es recomendable para polinomios de una sola variable.

Ejemplo 5.7 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

entre

$$q(x) = x^2 - 3x + 4$$

Solución

Ubicamos los coeficientes de los polinomios de forma ordenada, de la siguiente manera:

2	−4	3	−2	3	−1	1	−3	4	
−2	6	−8				2	2	2	−7
	2	−5	−2	3	−1				
	−2	6	−8						
		1	−10	3	−1				
		−1	3	−4					
			−7	−1	−1				
			7	−21	28				
				−22	27				

Por tanto

$$p(x) = (2x^3 + 2x^2 + x - 7)(x^2 - 3x + 4) + (-22x + 27)$$

El cociente es: $c(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 7$

El resto es: $r(x) = -22x + 27$.

5.5.3. Método de Horner

Es un caso particular del método de coeficientes separados y se emplea para la división de polinomios de cualquier grado. Se procede de la siguiente forma:

a) Se escribe los coeficientes del dividendo en una fila de izquierda a derecha con su propio signo.

b) Se escribe los coeficientes del divisor en una columna de arriba hacia abajo, a la izquierda del primer término del dividendo; el primero de ellos con su propio signo y los restantes con signos cambiados.

c) El primer término del dividendo se divide entre el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente, el cual se anota en la última fila del cuadro.

d) Se multiplica este término del cociente solamente por los términos del divisor a los cuales se les cambio su signo, colocándose los resultados a partir de la segunda columna a la derecha.

e) Se reduce la siguiente columna (efectuando la operación indicada) y se coloca este resultado en la parte superior para dividirlo entre el primer coeficiente del divisor y obtener el segundo término

del cociente.
f) Se multiplica este cociente por los términos del divisor a los cuales se cambio de signo, colocándose los resultados a partir de la tercera columna a la derecha.
g) Se continúa este procedimiento hasta obtener un término debajo del último término del dividendo, separando inmediatamente los términos del cociente y resto. El número de términos del resto está dado por el número de términos que tiene el último paso.
h) Se suma verticalmente obteniéndose los coeficientes del residuo. El grado del cociente y del resto se obtiene tal como se indicó en el método de coeficientes separados.

Ejemplo 5.8 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 8x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 3x + 2$$

entre

$$q(x) = 4x^2 + x + 3$$

Solución
Grado del cociente = Grado del dividendo - Grado del divisor = 5 - 2 = 3.
Grado del residuo = Grado del divisor - 1 = 2 - 1 = 1

4	8	14	5	16	3	2
-1		-2	-6			
			-3	-9		
				1	3	
					-2	-6
	2	3	-1	2	4	-4

Cociente: $c(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$
Resto: $r(x) = 4x - 4$

5.5.4. Regla de Ruffini

Este método se utiliza para dividir polinomios cuando el divisor es un binomio de primer grado. Se presenta tres casos:
1.- Cuando el divisor es de la forma $x \pm b$.
2.- Cuando el divisor es de la forma $ax \pm b$.
3.- Cuando el divisor es de la forma $ax^n \pm b$.

Primer caso: Forma del divisor $x \pm b$.
a) Se escribe los coeficientes del dividendo en línea horizontal. Completando previamente, si fuese necesario.
b) Se escribe el término independiente del divisor, con signo cambiado, un lugar a la izquierda y un lugar abajo del primer coeficiente del dividendo.
c) Se divide como en el caso de Horner, teniendo presente que el primer coeficiente del cociente, es igual al primer coeficiente del dividendo.
d) Para obtener los coeficientes del cociente, se separa la última columna, la cual constituye el resto.

Ejemplo 5.9 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 4x^4 - 5x^3 + 6x2 + 7x + 8 \quad entre \quad q(x) = x + 1$$

Solución
Ubicamos los coeficientes de los polinomios de forma ordenada, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -5 & 6 & 7 & 8 \\
-1 & \downarrow & -4 & 9 & -15 & 8 \\
\hline
 & 4 & -9 & 15 & -8 & 16
\end{array}
$$

Grado del cociente = Grado del dividendo - Grado del divisor = 4 - 1 = 3
Cociente: $c(x) = 4x^3 - 9x^2 + 15x - 8$
Resto: 16.

Segundo caso: Forma del divisor $ax \pm b$.

a) Se transforma el divisor a la primera forma, sacando en factor común el primer coeficiente del divisor:

$$ax \pm b = a\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$$

b) Se divide entre $x \pm \frac{b}{a}$ operando como el primer caso.
c) Los coeficientes del cociente obtenido son divididos entre el coeficiente de x del divisor.
d) El resto obtenido no se altera.

Ejemplo 5.10 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 18x^5 - 29x^3 - 5x^2 - 12x - 16 \quad \textit{entre} \quad q(x) = 3x + 2$$

Solución
Factorizamos el denominador

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 18 & 0 & -29 & -5 & -12 & -16 \\
-\frac{2}{3} & \downarrow & -12 & 8 & 14 & -6 & 12 \\
\hline
 & 18 & -12 & 21 & 9 & -18 & -4
\end{array}
$$

Grado del cociente = Grado del dividendo - Grado del divisor = 5 - 1 = 4
Verdaderos coeficientes del cociente:

$$\frac{18 - 12 - 21 + 9 - 18}{3} = 6 - 4 - 7 + 3 - 6$$

El cociente es: $c(x) = 6x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 6$
El resto es: $r(x) = -4$

Tercer caso: Forma del divisor $ax^n \pm b$.
La resolución sólo es posible por el método de Ruffini cuando los exponentes de la variable del dividendo son múltiplos enteros de la variable del divisor. El procedimiento se explica a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.11 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 6x^{36} + 17x^{27} - 16x^{18} + 17x^9 + 12 \quad \textit{entre} \quad q(x) = 3x^9 + 1$$

Solución
1) Se observa que los coeficientes de la variable del dividendo sean múltiplos del exponente de la variable del divisor.
2) Se factoriza el divisor

$$3\left(x^9 + \frac{1}{3}\right)$$

3) Se divide como en el primer caso.
4) Cada uno de los coeficientes del cociente obtenido, se divide entre coeficiente de x del divisor.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 6 & +17 & -16 & +17 & +12 \\
-\frac{1}{3} & \downarrow & -2 & -5 & +7 & -8 \\
\hline
 & 6 & +15 & -21 & +24 & 4
\end{array}
$$

Grado del cociente = Grado del dividendo - Grado del divisor = 36 - 9 = 27.
Verdaderos coeficientes del cociente:

$$\frac{6+15-21+24}{3} = 2+5-7+8$$

El cociente es: $c(x) = 2x^{27} + 5x^{18} - 7x^9 + 8$
El resto es: $r(x) = 4$.

5.5.5. Teorema del resto

Consiste en hallar el resto de una división sin realizar la división. El resto de dividir un polinomio en x, racional y entero, entre un binomio de la forma $ax \pm b$, es igual al valor numérico que adquiere dicho polinomio cuando se reemplaza en él x por $\mp \frac{b}{a}$.

Para hallar el resto se procede de la siguiente manera:

a) Se iguala el divisor a cero:

$$ax \pm b = 0.$$

b) Se despeja x

$$x = \mp \frac{b}{a}$$

c) Se reemplaza en el polinomio dividendo la variable x por:

$$\mp \frac{b}{a}$$

d) Se efectúa operaciones, el resultado es el valor del resto

$$r = p\left(\mp \frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo 5.12 *Dividir el polinomio*

$$p(x) = 6x^4 + 3x^3 - 19x2 + 14x - 15 \quad \textit{entre} \quad q(x) = 2x - 3$$

Solución
Hacemos $q(x) = 0$:

$$2x - 3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{3}{2}$$

Encontramos el resto

$$r = 6\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 19\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 14\left(\frac{3}{2}\right) - 15 = -3$$

5.6. Tarea

1. Usar la división normal para calcular el cociente y el residuo de las divisiones siguientes:
a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ entre $x - 2$;
b) $x^4 - 14x^3 + 2x^2 + 49x - 36$ entre $x + 2$;
c) $x^4 + x^2 + x - 2$ entre $x + 3$;
d) $x^5 - x^3 - 32x$ entre $x - 3$;
e) $3x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ entre $x + 2$;
f) $x^7 - 6x^5 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 1$ entre $x + 1$;
g) $x^4 + 10x^3 + 22x^2 - 7x + 5$ entre $x + 4$;
h) $x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 32$ entre $x - 4$.
Resp: a) $c(x) = x^2 - x,\ r(x) = -1$; **b)** $c(x) = x^3 - 16x^2 + 34x - 19,\ r(x) = 2$;
c) $c(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 29,\ r(x) = 85$; **d)** $c(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 24x + 40,\ r(x) = 120$;
e) $c(x) = 3x^2 - 4x + 13,\ r(x) = -16$; **f)** $c(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 6x - 1,\ r(x) = 2$;
g) $c(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 1,\ r(x) = 1$; **h)** $c(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 7,\ r(x) = -4$.

2. Demostrar por medio de la división normal que:
a) $(x-2)^2$ es un factor de $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$;
b) $(x+3)^2$ es un factor de $x^4 - 17x^2 + 6x + 90$;
c) $(x+1)^2$ es un factor de $2x^5 + 6x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x - 1$;
d) $(x-5)^2$ es un factor de $x^3 - 75x + 250$;
e) $(x+4)^2$ es un factor de $x^4 + 8x^3 - 128x - 256$.

3. Encuentre un polinomio de segundo grado sabiendo que es divisible por $x + 2$ y por $x - 4$ y que el coeficiente del término de mayor grado es 1.

4. Encuentre un polinomio de segundo grado sabiendo que sus dos raíces son 1 y -3, y que el término independiente es 6.

5. Encuentre un polinomio de segundo grado $p(x)$, sabiendo que $p(4) = 22$ y que una de sus raíces es 2.

6. Hallar m y n para que el polinomio $x^5 + mx^3 + n$ sea divisible por $x + 1$ y por $x - 1$.

7. Hallar el valor de m para que el polinomio $2x^3 + mx - 3$ sea divisible por $x - 2$.

8. Dado el polinomio $p(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x + a$, calcule el valor de a para que $p(x)$ sea divisible por $x - 1$. El resto de ls división de $p(x)$ entre $x - 1$ sea igual a 15.

9. Hallar el valor de a para que el polinomio $2x^3 + ax^2 - 5x + 4$ sea divisible por $x + 1$.

10. Hallar a, b y c sabiendo que en la división $4x^2 - 8x + 3$ entre $2x + 1$ se obtiene $ax + b$ de cociente y c de resto.

11. Calcule a y b para que el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + b$ sea divisible por $x - 2$ y además se cumpla $p(1) = 10$.

12. Hallar el valor de a para que $x + 5$ sea factor del polinomio $x^3 - 4x - 12a$.

13. Hallar a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

14. Calcule el valor de a para que el polinomio $3x^2 - 5x + a$ verifique que sea divisible por $x - 2$. El resto de la división entre $x - 2$ sea 8.

15. Hallar el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax^2 - ax + 1$ sea divisible por $x - 1$.

16. Hallar el valor de a para que al dividir el polinomio $x^3 - 3x^2 - ax + 12$ por $x - 3$ se obtenga 9 de resto.

17. Calcule a y b para que el polinomio $x^3 - ax^2 + 7x + b$ sea divisible por $x - 5$ y de un resto de 9 al dividir por $x - 2$.

18. Hallar el valor de a de forma que al dividir el trinomio $3x^2 + ax + 9$ por $x + 2$, se obtenga el mismo resto que al dividir $2x + 3x^3 + 3$ por $x + 2$.

19. El polinomio $x^2 + bx + c$ es divisible entre $x + 1$. Sabiendo que si lo dividimos entre $x - 1$ y $x - 3$ se obtiene el mismo resto, hallar los valores de b y c.

20. Efectúe la división entre los polinomios $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x - 7$ y $x^2 - x - 1$.

21. Efectúe la división entre los polinomios $4x^5 - 2x^3 + 3x$ y $x^2 - x + 2$.

22. Hallar los valores a y b para que el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^2 + ax + b$ se pueda expresar en la forma $p(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$.

23. Hallar los valores de a y b para que el polinomio $p(x) = x^3 + ax + b$ tenga como raíz doble $x = 1$.

24. Hallar b, c y d para que el polinomio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ sea divisible por $x + 1$, $x - 2$ y de resto 4 al dividirlo por x.

25. Encuentre un polinomio $p(x)$ y un número real k que verifiquen $(x + 1)p(x) + k = 3x^5 - x^2 + 6x - 12$.

26. Hallar a y b para que el polinomio $x^3 - 2x^2 + (a-1)x + b$ sea divisible por $x-1$ y al dividirlo por x de 2 de resto.

27. Hallar un polinomio de segundo grado, cuyo coeficiente principal sea 2, que se anule para $x=2$ y que su valor numérico para $x=4$ sea 5.

28. Hallar a y b para que el polinomio $x^2 + ax + b$ sea divisible por $x-1$ y además verifique que al dividir por $x+1$ se obtenga el mismo resto que al dividir por $x+3$.

29. Hallar a y b para que el polinomio $x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

30. Hallar a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

31. Hallar el valor de k para que el polinomio $x^k - 1$ sea divisible por $x+1$.

32. Sabiendo que x^2+2 es un factor del polinomio $p(x) = x^6 - 7x^2 - 6$, expresar $p(x)$ como un producto de factores cuadráticos.

33. Dados los polinomios $p(x) = x^5 + ax^4 + x^3 + 2x^2 + bx - 1$, $q(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ y $r(x) = x^2 - 3x - 1$. Hallar a y b en $\mathbb{R}$ tales que $r(x)$ sea el resto de dividir $p(x)$ por $q(x)$.

34. Determinar los valores de a y b en $\mathbb{R}$ de modo que el polinomio $p(x) = 2x^5 - 9x^4 + 14x^3 - (2a+1)x^2 + 2ax + b$ sea divisible por $(x-2)^2$.

35. Demuestre que $x+c$ es un factor del polinomio $p(x) = x^n + c^n$ para todo n entero positivo impar.

36. El polinomio $p(x) = x^5 - x^4 - \frac{31}{4}x^3 + 3x^2 + \frac{57}{4}x$ admite como raíz a $\frac{1}{2} - \sqrt{5}$. Encontrar las restantes raíces de $p(x)$.

37. El polinomio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ admite la raíz r. Demuestre que las otras dos raíces de $p(x)$ son las raíces del polinomio $q(x) = x^2 + (b+r)x - \frac{d}{r}$.

38. En los problemas siguientes, obtenga el cociente y el resto de la división:
a) $6x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ dividido por $3x-2$;
b) $25x^2 + 6x^4 - 13x^3 - 12x^5 + 7 + 3x$ dividido por $2 + 3x^2$;
c) $x^6 - 1$ dividido por $x^3 - 1$;
d) $(2-i)x^3 + (6-4i)x^2 + (4-i)x - (3+9i)$ dividido por $x + (3-i)$.

39. **a)** ¿Para qué valores de A y B se verifica que $A(2x-3)+B(x-2)=x$?
b) ¿Para qué valores de A, B y C se verifica que $A(x-1)(x-2)+B(x+2)(x-2)+C(x+2)(x-1)=x^2-5x-2$?

40. Encuentre, sin efectuar la diviosión, el resto en las siguientes divisiones:
a) $4x^3-5x^2-1$ dividido por $x+\frac{3}{2}$;
b) $x^8-x^5-x^3+1$ dividido por $x+i$;
c) $2ix^5-x^4-(1+i)x^3-8i$ dividido por $\frac{1}{2}x-2i$.

41. **a)** Sea $p(x)=x^5-32$. El cociente de dividir $p(x)$ por $d(x)$ es el polinomio $q(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ y el resto es -64. Hallar el polinomio $d(x)$.
b) Sea $p(x)=\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{9}{2}x^4-\dfrac{9}{2}x^3+\dfrac{21}{4}x^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{11}{4}$. El cociente de dividir $p(x)$ por $d(x)$ es el polinomio $q(x)=\dfrac{1}{2}x^3-5x^2+x-\dfrac{3}{4}$ y el resto es $r(x)=x+2$. Hallar $d(x)$.

42. **a)** El resto de dividir $2x^3+2x^2+6x+14$ por x^2+k es 8. Hallar k.
b) Si x^3+x^2+3 se divide por $x-k$ el resto es -1. Hallar k.

43. Determine el polinomio $p(x)$ de menor grado con coeficientes reales que tenga raíces:
a) -1, -3, 4 y tal que $p(2)=5$; **b)** -3 y -2 raíz doble y $p(1)=4$.

44. Resuelva en $\mathbb{C}$ las ecuaciones:
a) $\dfrac{2}{3}x^2(5-2x)(x^2+x+1)=0$; **b)** $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x^2+9)^2(2x^3-1)=0$.

45. Para cada uno de los siguientes polinomios se conoce una raíz. determine las raíces restantes:
a) $p(x)=x^3-x^2-4x-6$, raíz 3;
b) $p(x)=x^4+8x^3+26x^2+72x+153$, raíz -3i;
c) $p(x)=x^3-(1-i)x^2-(6+i)x-6i$, raíz 3.

46. Sea $p(x)=x^5+Ax^3-70x^2+Bx-30$. Sabiendo que -1 es raíz de multiplicidad dos, obtenga A y B.

47. **a)** El polinomio $p(x)=x^4+\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x-r$, admite las raíces racionales r y $2r$. Halle todas las raíces de $p(x)$.
b) El polinomio $p(x)=9x^3+54x^2-x+k$, admite como raíces r y $-r$. Calcule las raíces de $p(x)$ y el valor de k.

48. La profundidad x a la cual flota una esfera sólida de radio r y densidad d que se sumerge en el agua es una raíz positiva de la ecuación $x^3-r^2dx^2-14d=0$. Halle la profundidad, con aproximación de dos cifras decimales, a la cual flota una esfera de 4 cm. de diámetro si está hecha de un material cuya densidad es 0,5.

49. ¿Para qué valores de k serán números reales los ceros de $p(x) = x^2 - 2kx - k - 1$.

50. Sea $p(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales. Muestre que ninguna recta paralela al eje X puede intersectar a la gráfica de $p(x)$ más de n veces.

51. Utilizando el método de coeficientes separados, dividir los siguientes polinomios:
a) $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ entre $x + 2$;
b) $2x^3 + 6x^2 - x + 1$ entre $x + 2$;
c) $x^4 + 2x^2 + 1$ entre $x - 1$;
d) $x^4 - 3x^2 + 2x$ entre $2x - 1$;
e) $x5 - 2x4 - 3x + 1$ entre $x^2 - 1$;
f) $3x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ entre $2x + 3$.
Resp: a) $c(x) = 3x^3 - 8x^2 + 17x - 37,\ \ r(x) = 75$; **b)** $c(x) = 2x^2 + 2x - 5,\ \ r(x) = 11$; **c)** $c(x) = x^3 + x^2 + 3x + 3,\ \ r(x) = 4$; **d)** $c(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{8}x + \frac{5}{16},\ \ r(x) = \frac{5}{16}$; **e)** $c(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2,\ \ r(x) = -2x$; **f)** $c(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{17}{8},\ \ r(x) = \frac{59}{16}$.

52. Utilizando el método de Horner, dividir los siguientes polinomios:
a) $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ entre $x + 2$;
b) $2x^3 + 6x^2 - x + 1$ entre $x + 2$;
c) $x^4 + 2x^2 + 1$ entre $x - 1$;
d) $x^4 - 3x^2 + 2x$ entre $2x - 1$;
e) $x^5 - 2x^4 - 3x + 2$ entre $x^2 - 1$;
f) $6x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ entre $2x + 3$.
Resp: a) $c(x) = 3x^3 - 8x^2 + 17x - 37,\ \ r(x) = 75$; **b)** $c(x) = 2x^2 + 2x - 5,\ \ r(x) = 11$; **c)** $c(x) = x^3 + x^2 + 3x + 3,\ \ r(x) = 4$; **d)** $c(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{8}x + \frac{5}{16},\ \ r(x) = \frac{5}{16}$; **e)** $c(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2,\ \ r(x) = -2x$; **f)** $c(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{17}{8},\ \ r(x) = \frac{59}{16}$.

53. Efectuar las siguientes divisiones por el método de Horner:
a) $x^4 + x^3 + 7x^2 - 6x + 8$ entre $x^2 + 2x + 8$;
b) $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - x + 2$ entre $x^2 - 3x + 2$;
c) $x^8 - y^8$ entre $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.
Resp: a) $c(x) = x^2 - x + 1,\ r(x) = 0$; **b)** $c(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1,\ r(x) = 0$; **c)** $c(x, y) = x^5 - x^4y + xy^4 - y^5,\ r(x, y) = 0$.

54. Usar la regla de Ruffini para efectuar las divisiones:
a) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ entre $x - 2$;
b) $x^4 - 14x^3 + 2x^2 + 49x - 36$ entre $x + 2$;
c) $x^4 + x^2 + x - 2$ entre $x + 3$;
d) $x^5 - x^3 - 32x$ entre $x - 3$;
e) $3x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ entre $x + 2$;
f) $x^7 - 6x^5 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 1$ entre $x + 1$;
g) $x^4 + 10x^3 + 22x^2 - 7x + 5$ entre $x + 4$;
h) $x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 32$ entre $x - 4$;
i) $x^3 - 3x^2 + 16x - 44$ entre $x - \frac{1}{10}$;
j) $2x^4 + 9x^3 + 14x + 8$ entre $x + \frac{1}{2}$;
k) $6x^4 + 5x^3 + 10x - 4$ entre $x - \frac{1}{2}$;
l) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 17x - 6$ entre $x - \frac{1}{3}$;

m) $3x^4 - 14x^3 - 57x^2 + 65x - 56$ entre $x - 7$;
n) $3x^4 + 40x^3 + 85x^2 + 97x + 99$ entre $x + 11$;
o) $x^8 - 81x^6 - 2x^3 + 18x2 + 8x - 72$ entre $x - 9$;
p) $18x^5 + 20x^4 + 29x^3 + 57x^2 + 6x$ entre $x + \frac{1}{9}$;
q) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 13x - 21$ entre $x + 3$;
r) $x^3 + 0,4x^2 - 0,18x + 0,33$ entre $x - 0,2$.

55. Calcule el cociente y el resto de la división:
a) $3x^2 - 7x + 5$ entre $x^2 - x + 1$; **b)** $x^3 - x$ entre $x^2 - 1$;
c) $x^3 - 8x^2 - 9x + 7$ entre $x - 3$.

56. Determine los valores de k, para que el polinomio $q(x)$ sea divisible exactamente para $p(x)$:
a) $p(x) = kx^4 + (k^2 - 2)x^3 - k(k^2 + 2)x^2 + k^2(2 - k^2)x + 2k^3,\ \ q(x) = x - 1$;
b) $p(x) = 4kx^4 + (2k^2 + 24k - 2)x^3 + (12k^2 + 35k - 12)x^2 + 6(3k^2 - k - 3)x - 9k,\ \ q(x) = 2x + 1$;
c) $p(x) = k^2x^4 + 2k^3x^3 + (k^4 - 1)x^2 - 2kx - k^2,\ \ q(x) = x + 2$;
d) $p(x) = 2x^4 + (2k + 3)x^3 + k(3 - 10k)x^2 + 3k^2(2k - 5)x + 9k^3,\ \ q(x) = x - 3$;
e) $p(x) = k^3x^4 + (k^4 + k^2)x^3 + (k^3 - 8k)x^2 - 4(2k^2 + 3)x - 12k,\ \ q(x) = x + 3$;
f) $p(x) = x^5 - 5kx^4 + 7k^2x^3 + k^3x^2 - 8k^4x + 4k^4,\ \ q(x) = x^2 - 1$;
g) $p(x) = x^5 + kx^4 - 6k^2x^3 - 14k^3x^2 - 11k^4x - 3k^5,\ \ q(x) = x^2 - 2x - 3$.

57. Si el polinomio $p(x) = (m + 2n - 3)x^4 + (m - n + 5)x$ es idénticamente nulo, encuentre los valores de m y n.
Resp: $m = -\frac{7}{3},\ \ n = \frac{8}{3}$

58. Hallar m, n y p en la siguiente identidad:

$$7x^2 - 6x + 1 = m(x - 1)(x - 2) + n(x - 2)(x - 3) + p(x - 3)(x - 1).$$

Resp: $m = 23,\ \ p = -17\ \ n = 1$

59. Hallar el valor de m para que la división sea exacta:

$$x^4 - ma^2x^2 + a^4 \quad \text{entre} \quad x^2 - ax + a^2$$

Resp: $m = -1$

60. ¿Cuál es el valor de m si el polinomio $p(x) = x^3 + m(a - 1)x^2 + a^2(mx + a - 1)$ es divisible entre $x - a + 1$?
Resp: $m = -1$

61. Determine el valor de m si el polinomio $x^3 + 3x^2 - 5x + m$ es divisible entre $x + 2$.
Resp: $m = -14$

62. Dado el polinomio $x^3 + 2x^2 - a + m$, determinar el valor de m para que, al dividirlo por $x + \frac{1}{2}$ se obtenga de resto 1.
Resp: $m = a - \frac{3}{8}$

63. Determinar el valor numérico de m, del trinomio $3x^2 + mx + 9$, con la condición de que, al dividir éste para $x + 2$, dé el mismo resto que la división de $2x^3 + 3x + 3$ por dicho binomio.
Resp: $m = 20$

64. Determine m y n si la división de $x^4 - 3ax^3 + a^2x^2 + ma^3x + na^4$ entre $x^2 - ax + a^2$ deja como resto $7a^3x + 3a^4$.
Resp: $m = 7, \ \ n = 1$

65. El primer coeficiente de un polinomio de segundo grado es 2; al dividirlo por $x + 2$, el residuo es 0; al dividirlo por $x + 3$, el residuo es 9. Encuentre el polinomio.
Resp: $2x^2 + x - 6$

5.7. Métodos de factorización

Factorización es la operación que tiene por objeto transformar una expresión algebraica racional y entera en otra equivalente que sea igual al producto de sus factores primos racionales y enteros.

5.7.1. Factor común

Los principales métodos para factorizar son los siguientes:

El factor común de dos o más expresiones algebraicas es la parte numérica y/o literal que está repetida en cada una de dichas expresiones. El factor común puede ser de tres tipos:
A) Factor común monomio.
B) Factor común polinomio.
C) Factor común por agrupación.

A) Factor común monomio: Cuando el factor común en todos los términos es un monomio.

Ejemplo 5.13 *Factorizar la expresión*

$$72x^{2a}y^b + 48x^{a+1}y^{b+1} + 24xy^{2b}.$$

Solución
El factor común es $24x^ay^b$, de este modo

$$24x^ay^b(3x^a + 2xy + y^b)$$

B) Factor común polinomio: Cuando el factor común que aparece es un polinomio.

Ejemplo 5.14 *Factorizar la expresión*

$$(x+1)^7(x^2+1)^{10} - (x+1)^5(x^2+1)^{11}$$

Solución
El factor común es $(x+1)^5(x^2+1)^{10}$, luego

$$(x+1)^5(x^2+1)^{10}[(x+1)^2 - (x^2+1)] \ \Rightarrow \ (x+1)^5(x^2+1)^{10}(x2 + 2x + 1 - x^2 - 1)$$

$$(x+1)^5(x^2+1)^{10}(2x) \;\Rightarrow\; 2x(x+1)^5(x^2+1)^{10}.$$

C) Factor común por agrupación: Sea

$$x^{m+n}+y^{m+n}+(xy)^m+(xy)^n$$

efectuando operaciones

$$x^m x^n + y^m y^n + x^m y^m + x^n y^n$$

agrupando

$$(x^m x^n + x^m y^m) + (y^m y^n + x^n y^n)$$

factoricemos cada paréntesis

$$x^m(x^n+y^m)+y^n(y^m+x^n)$$

el factor común es el paréntesis, así

$$(x^n+y^m)(x^m+y^n).$$

5.7.2. Método de identidades

A) Diferencia de cuadrados

$$x^{2m}-y^{2n}=(x^m)^2-(y^n)^2=(x^m-y^n)(x^m+y^n)$$

B) Suma o diferencia de cubos

$$x^{3m}\pm y^{3n}=(x^m)^3\pm(y^n)^3=(x^m\pm y^n)(x^{2m}\mp x^m y^n+y^{2n})$$

C) Trinomio cuadrado perfecto

$$x^{2m}\pm 2x^m y^n + y^{2n}=(x^m\pm y^n)^2$$

5.7.3. Método del aspa

A) Aspa simple: Se usa para factorizar trinomios de la forma

$$ax^{2n}\pm bx^n\pm c$$

o, de la forma

$$x^{2n}\pm bx^n\pm c$$

Se descompone en dos factores al primer término, ax^{2n} o x^{2n}, según sea el caso. Se coloca estos factores en las puntas de la izquierda del aspa. El término in dependiente, incluyendo el signo, también se descompone en dos factores, los que se coloca en las puntas de la derecha del aspa. Los factores de la expresión dada son la suma horizontal de arriba y la suma horizontal de abajo. El término central debe ser igual a la suma de los productos en aspa.

Ejemplo 5.15 *Factorizar la siguiente expresión*

$$x^{4n}+7x^{2n}+12$$

Solución
El término x^{4n} lo descomponemos en dos factores: x^{2n} y x^{2n}. El término independiente lo descomponemos en dos factores: 4 y 3. Se coloca los factores en la punta izquierda y derecha del aspa:

El término central es la suma de los productos en aspa

$$3x^{2n} + 4x^{2n} = 7x^{2n}$$

Los factores son las sumas horizontales de arriba y abajo

$$x^{4n} + 7x^{2n} + 12 = (x^{2n} + 4)(x^{2n} + 3)$$

B) Aspa doble: Se usa para factorar polinomios de la forma

$$ax^{2n} \pm bx^n y^n \pm cy^{2n} \pm dx^n \pm ey^n \pm f$$

y también para algunos polinomios de cuarto grado. Se ordena en forma decreciente para una de las variables; luego, se traza y se ejecuta un aspa simple para los tres primeros términos con trazo continuo. A continuación y, pegada al primer aspa, se traza otro, de tal modo que el producto de los elementos del extremo derecho de este aspa multiplicados verticalmente sea el término independiente.

Primer factor: suma de los elementos tomados horizontales de la parte superior.

Segundo factor: suma de los elementos tomados horizontalmente de la parte inferior.

Ejemplo 5.16 *Factorizar la siguiente expresión*

$$12x^2 - 7xy - 10y^2 + 59y - 15x - 63$$

Solución
Tomando los tres primeros términos:
$12x^2$ en dos factores: $4x$ y $3x$
$-10y^2$ en dos factores: $-5y$ e $2y$
-63 en dos factores: -9 y 7
Verificamos los términos:
$8xy - 15xy = -7xy$ segundo término
$45y + 14y = 59y$ cuarto término
$-36x + 21x = -15x$ quinto término
Luego, la expresión factorizada es

$$(4x - 5y + 7)(3x + 2y - 9).$$

5.7.4. Método de evaluación

Este método se aplica a polinomios de una sola variable que se caracteriza por anularse para algunos de los divisores de su término independiente afectado de doble signo, o alguna combinación.

Ejemplo 5.17 *Factorizar la siguiente expresión*

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

Solución
Los números de prueba son ± 1, ± 2, ± 4, $\pm \frac{1}{2}$. Dividiendo $p(x)$ sucesivamente entre los factores obtenidos por el método de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 1 & -9 & -4 & 4 \\
-1 & \downarrow & -2 & 1 & 8 & -4 \\
\hline
 & 2 & -1 & -8 & 4 & 0 \\
2 & \downarrow & 4 & 6 & -4 & \\
\hline
 & 2 & 3 & -2 & 0 & \\
-2 & \downarrow & -4 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & 0 & &
\end{array}
$$

Después de la división se obtiene:

$$p(x) = (x+1)(x-2)(x+2)(2x-1)$$

5.7.5. Método de artificios de cálculo

A) Reducción a diferencia de cuadrados: Consiste en sumar y restar una misma cantidad a la expresión dada para transformarla en una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 5.18 *Factorizar la siguiente expresión:*

$$x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$$

Solución
Sumamos y restamos $4x^2y^2$:

$$x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4 - 4x2y^2 \;\Rightarrow\; (x^2+3y^2)^2 - 4x^2y^2 \;\Rightarrow\; (x^2+3y^2)^2 - (2xy)^2$$

Realizamos la diferencia de cuadrados:

$$(x^2+3y^2-2xy)(x^2+3y^2+2xy).$$

B) Sumas y restas: Consiste en sumar y restar una misma cantidad de tal manera que se forme una suma o una diferencia de cubos.

Ejemplo 5.19 *Factorizar la expresión:*

$$x^5 + x^4 + 1$$

Solución
Sumamos y restamos $x^3 + x^2 + x$:

$$x^5 + x^4 + (x^3 + x^2 + x) + 1 - (x^3 + x^2 + x)$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^3 - x^2 - x$$

Agrupamos

$$(x^5 + x^4 + x^3) + (x^2 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x)$$

Sacamos factor común

$$x^3(x^2+x+1) + (x^2+x+1) - x(x^2+x+1)$$

$$(x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

C) Cambio de variable: Consiste en cambiar una variable por otra, de manera que se obtenga una forma de factorización conocida, o que tenga una forma más simple.

Ejemplo 5.20 *Factorizar la expresión:*

$$1 + x(x+1)(x+2)(x+3)$$

Solución
Agrupamos:

$$1 + [x(x+3)][(x+1)(x+2)] \quad \Rightarrow \quad 1 + (x^2+3x)(x^2+3x+2)$$

Haciendo $x^2 + 3x = y$, obtenemos

$$1 + y(y+2) \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y + 1 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2$$

Sustituimos la variable

$$(x^2+3x+1)^2.$$

5.7.6. Factorización recíproca

Polinomio recíproco: Es aquel cuyos coeficientes equidistantes de los extremos son iguales:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A.$$

Ejemplo 5.21 *Factorizar la siguiente expresión:*

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

Solución
Extraemos x^2 como factor común:

$$x^2\left(6x^2 + 5x + 6 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

Ordenando

$$x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6\right]$$

Haciendo $x + \frac{1}{x} = y$, entonces $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Sustituyendo

$$x^2[6(y^2-2) + 5y + 6]$$

Efectuamos la multiplicación dentro de los corchetes

$$x^2(6y^2 + 5y - 6)$$

Factorizamos el paréntesis por el aspa simple, entonces

$$x^2(3y-2)(2y+3)$$

Reponiendo x

$$x^2\left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right]\left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3\right] \quad \Rightarrow \quad x^2\left(\frac{3x^2+3-2x}{x}\right)\left(\frac{2x^2+2+3x}{x}\right)$$

$$(3x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 3x + 2).$$

5.8. Tarea

1. Factorar las expresiones:

a) $2ab - 2bc - ad + cd + 2b^2 - bd$;
b) $x^{5m} - 9x^{3m}y^{4n}$;
c) $a^2(x-y) + b^2(y-x) - c^2(x-y)$;
d) $2a^3x^3 - x^6 - a^6 + 2b^3y^3 + b^6 + y^6$;
e) $1 + xy + a(x+y) - a(xy+1) - x - y$;
f) $\frac{1}{5}a^7b^4x + \frac{9}{10}a^5b^3x^2 + \frac{27}{20}a^3b^2x^3 + \frac{27}{40}abx^4$;
g) $2a^2y^5 + aby^5 - aby^3 - 2a^2y^3$;
h) $5a + ab + 5b + b^2$;
i) $5ax + 3by - 5ay - 3bx$;
j) $3a^5 - 6a^4b + 3a^3b^2$;
k) $5a^5b^3 + 5a^2b^9$;
l) $ax - bx + by + cy - cx - ay$;
m) $4a^2 - c^4 - 2ac - c^3$;
n) $2a^5c^5 + abc^5 - abc^3 - 2a^2c^3$.

Resp:

a) $(a+b-c)(2b-d)$;
b) $x^{3m}(x^m + 3y^{2n})(x^m - 3y^{2n})$;
c) $(a^2 - b^2 - c^2)(x-y)$;
d) $-(x^3 + y^3 - a^3 + b^3)(x^3 - y^3 - a^3 - b^3)$;
e) $(1-a)(x-1)(y-1)$;
f) $\frac{1}{40}abx(3x + 2a^2b)^3$;
g) $ay^3(y+1)(y-1)(2a+b)$;
h) $(a+b)(b+5)$;
i) $(x-y)(5a-3b)$;
j) $3a^3(a-b)^2$;
k) $5a^2b^3(a+b^2)(a^2 - ab^2 + b^4)$;
l) $(a-b-c)(x-y)$;
m) $(2a+c^2)(2a-c-c^2)$;
n) $ac^3(2a^4c^2 - 2a + bc^2 - b)$.

2. Factorar las expresiones:

a) $36x^2 - 84xy + 49y^2$;
b) $(x-3y)^2 - 16z^2$;
c) $(x+2y)^2 - 4(3x-y)^2$;
d) $x^8 - 256$;
e) $x^{5m} - 9x^{3m}y^{4n}$;
f) $x^6 + 14x^3 + 49$;
g) $(x+y)^3 + (x-y)^3$;
h) $(x+y)^2 + 6a(x+y) + 9a^2$;
i) $x^6 - 64y^6$;
j) $32x^{10} + y^{25}$;
k) $\frac{1}{5}a^7b^4x + \frac{9}{10}a^5b^3x^2 + \frac{27}{40}abx^4$;
l) $125a^3 - 343b^3$;
m) $(2a-3b)^2 - (3a-2b)^2$;
n) $(a-b)^3 - 8b^3$;
o) $36a^2b^2 - 100$;
p) $(a+2b)^2 - 4(3a-b)^2$;
q) $8a^3 + (b-2a)^3$;
r) $9(a-3b)^2 - 16(b-2a)^2$;
s) $25 - 49a^2b^6c^4$;
t) $(2a-b)^3 - (3b-a)^3$;
u) $1 + 1000b^6$;
v) $8(a-b)^3 + 27(b-2a)^3$;
w) $a^3b^6c^9 - 8d^6$;
x) $5a^5b^3 + 5a^2b^9$;
y) $a^3b^3 - 27c^3$;
z) $4a^2b^4 - 81c^2$.

Resp:

a) $(6x-7y)^2$;
b) $(x-3y+4z)(x-3y-4z)$;
c) $7x(4y-5x)$;
d) $(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^4+16)$;
e) $x^{3m}(x^m + 3y^{2n})(x^m - 3y^{2n})$;
f) $(x^3+7)^2$;
g) $2x(x^2+3y^2)$;
h) $(x+y+3a)^2$;
i) $(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$;
j) $(2x^2+y^5)(16x^8 - 8x^6y^5 + 4x^4y^{10} - 2x^2y^{15} + y^{20})$;
k) $\frac{1}{40}abx(3x+2a^2b)^3$;
l) $(5a-7b)(25a^2 + 35ab + 49b^2)$;
m) $5(a+b)(b-a)$;
n) $(a-3b)(a^2+3b^2)$;
o) $4(3ab+5)(3ab-5)$;
p) $7a(4b-5a)$;
q) $b(12a^2 - 6ab + b^2)$;
r) $5(a+b)(13b-11a)$;
s) $(7ab^3c^2+5)(5-7ab^3c^2)$;
t) $(3a-4b)(3a^2-3ab+7b^2)$;
u) $(10b^2+1)(10b^2+\sqrt{30}b+1)(10b^2-\sqrt{30}b+1)$;

v) $(b-4a)(52a^2-62ab+19b^2)$;
w) $(ab^2c^3-2d^2)(a^2b^4c^6+2ab^2c^3d^2+d^4)$;
x) $5a^2b^3(a+b^2)(a^2-ab^2+b^4)$;
y) $(ab-3c)(a^2b^2+3abc+9c^2)$;
z) $(2ab^2+9c)(2ab^2-9c)$.

3. Factorar las siguientes expresiones:

a) $6x^2+7x-3$;
b) $6x^2+19x+10$;
c) $2x^2-7x-15$;
d) $6x^2+5x+1$;
e) $2x^2+9x+10$;
f) $3x^2+16x+16$;
g) $3x^2-7x+4$;
h) x^2+4x-5;
i) x^2+x-6;
j) $2x^2-7x+3$;
k) $2mx^2+(mn-2n)x-n^2$;
l) $4m^2x^2+2mx-2$;
m) $m^2x^2+4mx+3$;
n) $mx^2+(m+n)x+n$;
o) $3mx^2+(mn+3)x+n$;
p) $2x^2+3nx+n^2$;
q) $mx^2-(mn-n)x-n^2$;
r) m^2x^2-mx-6;
s) $mx^2+(2mn-1)x-2n$;
t) $2nx^2+(2n^2-1)x-n$. **u)** $64(a-b)^3+1$.

Resp:

a) $(3x-1)(2x+3)$;
b) $(2x+5)(3x+2)$;
c) $(x-5)(2x+3)$;
d) $(3x+1)(2x+1)$;
e) $(x+2)(2x+5)$;
f) $(3x+4)(x+4)$;
g) $(3x-4)(x-1)$;
h) $(x-1)(x+5)$;
i) $(x+3)(x-2)$;
j) $(x-3)(2x-1)$;
k) $(mx-n)(2x+n)$;
l) $(2mx-1)(2mx+2)$;
m) $(mx+1)(mx+3)$;
n) $(mx+n)(x+1)$;
o) $(3x+n)(mx+1)$;
p) $(2x+m)(x+n)$;
q) $(x-n)(mx+n)$;
r) $(mx+2)(mx-3)$;
s) $(x+2n)(mx-1)$;
t) $(x+n)(2mx-1)$;
u) $(4a-4b+1)(16a^2-32ab-4a+16b^2+4b+1)$.

4. Factorar los siguientes polinomios:

a) $2x^2+xy-x-y^2+2y-1$;
b) $2x^2+3x-2y^2-y+1$;
c) $2x^2+3xy-6x+y^2-4y+4$;
d) $2x^2-6xy+9x+4y^2-12y+9$;
e) $x^2-xy-3x-6y^2-y+2$;
f) $2x^2-2xy-3x-4y^2+9y-2$;
g) $x^2+xy+x-12y^2+11y-2$;
h) $2x^2+5xy+3x-3y^2+2y+1$;
i) x^2+5x-y^2+y+6;
j) $3x^2-7xy+5x-6y^2+7y-2$.

Resp:

a) $(2x-y+1)(x+y-1)$;
b) $(x+y+1)(2x-2y+1)$;
c) $(2x+y-2)(x+y-2)$;
d) $(2x-2y+3)(x-2y+3)$;
e) $(x+2y-1)(x-3y-2)$;
f) $(2x-4y+1)(x+y-2)$;
g) $(x-3y+2)(x+4y-1)$;
h) $(x+3y+1)(2x-y+1)$;
i) $(x+y+2)(x-y+3)$;
j) $(3x+2y-1)(x-3y+2)$.

5. Factorar los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$;
b) $x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 81x - 180$;
c) $x^4 - 32x^2 + 256$;
d) $36x^4 - 36x^3 - x^2 + 9x - 2$;
e) $x^4 - 4x^3 - 52x^2 + 112x + 384$;
f) $4x^4 - 25x^2 + 36$;
g) $x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384$;
h) $x^4 + 4x^3 - 34x^2 - 76x + 105$;
i) $x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 105$.

Resp:

a) $(x-1)(x-3)^3$;
b) $(x+3)(x-3)(x+4)(x+5)$;
c) $(x+4)^2(x-4)^2$;
d) $(2x+1)(2x-1)(3x-1)(3x-2)$;
e) $(x+2)(x-4)(x+6)(x-8)$;
f) $(x+2)(x-2)(2x+3)(2x-3)$;
g) $(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$;
h) $(x-1)(x+3)(x-5)(x+7)$;
i) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$.

6. Factorar los siguientes polinomios:

a) $2x^5 + 9x^4 - 26x^3 + 6x + 9$;
b) $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$;
c) $x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 79x^2 - 46x + 120$;
d) $4x^5 - 7x^3 + x^2 + 3x - 1$;
e) $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 16x - 48$;
f) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$;
g) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$;
h) $x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16$;
i) $2x^5 - x^4 - 36x^3 + 18x^2 + 162x - 81$.

Resp:

a) $(x-1)^2(x+3)^2(2x+1)$;
b) $(x+1)^2(x-2)^3$;
c) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)(x+5)$;
d) $(x-1)(x+2)^2(2x-1)^2$;
e) $(x-3)(x+2)^2(x-2)^3$;
f) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x-3)$;
g) $(x+1)^2(x-1)^3$;
h) $(x-1)(x+2)^2(x-2)^2$;
i) $(x+3)2(x-3)^2(2x-1)$.

7. Factorar los siguientes polinomios:
a) $x^6 - x^5 - 11x^4 + 17x^3 + 22x^2 - 52x + 24$;
b) $16x^6 - 96x^5 + 136x^4 + 48x^3 - 71x^2 - 6x + 9$;
c) $x^6 + 2x^5 - 31x^4 - 64x^3 + 224x^2 + 512x + 256$;
d) $2x^6 - 15x^5 + 27x^4 + 26x^3 - 72x^2 - 27x + 27$;
e) $4x^6 + 32x^5 - 15x^4 - 115x^3 + 55x^2 + 111x - 72$;
f) $36x^6 + 60x^5 - 83x^4 - 120x^3 + 83x^2 + 60x - 36$;
g) $x^6 + 18x^5 + 127x^4 + 444x^3 + 799x^2 + 690x + 225$;
h) $x^6 - 7x^5 - 3x^4 + 151x^3 - 514x^2 + 708x - 360$;
i) $32x^6 + 112x^5 + 32x^4 - 56x^3 - 22x^2 + 7x + 3$;
j) $81x^6 + 324x^5 + 306x^4 - 72x^3 - 71x^2 + 4x + 4$.

Resp:

a) $(x+2)(x+3)(x-1)^2(x-2)^2$;
b) $(x-3)^2(2x+1)^2(2x-1)^2$;
c) $(x+1)^2(x+4)^2(x-4)^2$;
d) $(x+1)^2(x-3)^3(2x-1)$;
e) $(x+8)(x-1)^3(2x+3)^2$;
f) $(x+1)(x-1)(2x+3)^2(3x-2)^2$;
g) $(x+1)^2(x+3)^2(x+5)^2$;
h) $(x+5)(x-3)^2(x-2)^3$;
i) $(x+3)(2x-1)^2(2x+1)^3$;
j) $(x+2)^2(3x+1)^2(3x-1)^2$.

8. Factorar los siguientes polinomios:

a) $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3$;
b) $x^4 + 3x^3y - 7x^2y^2 - 27xy^3 - 18y^4$;
c) $6x^3 + 11x^2y - xy^2 - 6y^3$;
d) $4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4$;
e) $6x^4 - 5x^3y - 20x^2y^2 + 25xy^3 - 6y^4$;
f) $2x^4 - 5x^3y + 5xy^3 - 2y^4$;
g) $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$;
h) $4x^4 + 4x^3y - 39x^2y^2 - 36xy^3 + 27y^4$;
i) $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3$.

Resp:

a) $(x + y)(x - y)(2x - y)$;
b) $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x - 3y)$;
c) $(x + y)(2x + 3)(3x - 2y)$;
d) $(x + 2y)(x - 2y)(2x + y)(2x - y)$;
e) $(x + 2y)(x - 2y)(x + 3y)(x - 3y)$;
f) $(x + y)(x - y)(2x - y)(x - 2y)$;
g) $(x + 2y)(x - 2y)(x + 3y)(x - 3y)$;
h) $(x + 3y)(2x - y)(x - 3y)(2x + 3y)$;
i) $(x + y)(x - y)(x - 2y)$.

9. Descomponer en factores:

a) $x^4 - 1$;
b) $x^6 - 1$;
c) $x^6 + 1$;
d) $x^4 - 18x^2 + 81$;
e) $x^{12} - 2x^6 + 1$;
f) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$;
g) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$;
h) $4y^2z^2 - (y^2 + z^2 - x^2)^2$;
i) $x^4 - x^2y^2 + y^4$;
j) $x^4 + 4x^2 - 5$;
k) $4x^4 + 5x^2 + 1$;
l) $z^4 - (1 + xy)z^2 + xy$;
m) $x^4 + 324$;
n) $x^4 + x^2 + 1$;
o) $x^8 + x^4 + 1$;
p) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$;
q) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$;
r) $(x^2 + x + 3)(x^2 + x + 4) - 12$;
s) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$;
t) $2x^2y + 4xy^2 - x^2z + az^2 - 4y^2z + 2yz^2 - 4xyz$;
u) $(xy + xz + yz)(x + y + z) - xyz$;
v) $x(y - 2z)^2 + y(x - 2z)^2 - 2z(x + y)^2 + 8xyz$;
w) $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$;
x) $(x + y)^5 - (x^5 + y^5)$;
y) $x^2y^2(y - x) + y^2z^2(z - y) + x^2z^2(x - z)$;
z) $8x^3(y + z) - y^3(2x + z) - z^3(2x - y)$.

Resp:
a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;
b) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
c) $(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$;
d) $(x - 3)^2(x + 3)^2$;
e) $(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$;
f) $(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$;
g) $(x - 1)(x + 1)^3$;
h) $(x - y + z)(x + y - z)(-x + y + z)(x + y + z)$;
i) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$;
j) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 5)$;
k) $(x^2 + 1)(4x^2 + 1)$;
l) $(z - 1)(z + 1)(z^2 - xy)$;
m) $(x^2 + 6x + 18)(x^2 - 6x + 18)$;
n) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
o) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$;
p) $(x^2 + 1)(2x^2 + x + 2)$;

q) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3x+6)$;
r) $x(x+1)(x^2+x+7)$;
s) $(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$;
t) $(x+2y)(2y-z)(x-z)$;
u) $(x+y)(y+z)(z+x)$;
v) $(x-2z)(y-2z)(x+y)$;
w) $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$;
x) $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$;
y) $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$;
z) $(y+z)(2x-y)(2x+z)(2x+y-z)$.

10. Descomponer en factores:

a) $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$;
b) x^4+9;
c) x^4+y^4;
d) x^3+5x^2+3x-9;
e) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$;
f) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$;
g) $2(x^2+2x-1)^2+5(x^2+2x-1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$;
h) $(x-y)z^3-(x-z)y^3+(y-z)x^3$;
i) $(x-y)^3+(y-z)^3-(x-z)^3$;
j) $(x^2+y^2)^3-(y^2+z^2)^3-(x^2-z^2)^3$;
k) $x^4+2x^3y-3x^2y^2-4xy^3-y^4$;
l) $x^2y^2+xy^2+x^2z+y^2z+yz^2+3xyz$;
m) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$;
n) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
o) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$;
p) $x^4-2x^3y-8x^2y^2-6xy^3-y^4$;
q) $x^4+x^2+\sqrt{2}x+2$;
r) $x^{10}+x^5+1$.

Resp:

a) $3(x+y)(y+z)(z+x)$;
b) $(x^2+\sqrt{6}x+3)(x^2-\sqrt{6}x+3)$;
c) $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)$;
d) $(x-1)(x+3)^2$;
e) $(x^2+3x+1)^2$;
f) $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$;
g) $(3x^2+4x-1)(3x^2+2x+1)$;
h) $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$;
i) $3(x-y)(y-z)(z-x)$;
j) $3(x+z)(x-z)(x^2+y^2)(y^2+z^2)$;
k) $(x^2-xy-y^2)(x^2+3xy+y^2)$;
l) $(x+y+z)(xy+yz+xz)$;
m) $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$;
n) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
o) $(x^2+x+1)^2$;
p) $(x+y)^2(x^2-4xy-y^2)$;
q) $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+2)$;
r) $(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

5.9. Máximo común divisor y mínimo común multiplo

Si los números naturales p_1 y p_2 son divisibles por un mismo número natural p, este último se denomina divisor común de los números p_1 y p_2. El número natural máximo por el que se dividen p_1 y p_2 lleva el nombre de máximo común divisor (MCD) de dichos números. Si el MCD de dos números es igual a la unidad, se llaman recíprocamente primos.

Si los números naturales p_1 y p_2 son recíprocamente primos y el número natural p es divisible tanto por p_1 como por p_2, entonces p se divide por el producto p_1p_2.

Se llama mínimo común múltiplo (mcm) de dos números naturales p_1 y p_2 un número natural mínimo que es divisible por p_1 y por p_2.

Es decir, el mcm de dos números se obtiene multiplicando cualquiera de ellos por el cociente de dividir el otro por el MCD de ambos. Si éstos son primos entre sí, el mcm es su producto.

Para determinar el MCD (mcm) de varios enteros, calcúlese el MCD (mcm) de dos de ellos; después el MCD (mcm) de éste con un tercer entero, y se sigue así, sucesivamente, hasta haber utilizado todos los enteros dados. El último MCD (mcm) calculado es el MCD (mcm) buscado.

5.9.1. Divisiones sucesivas

Definición 5.12 Máximo común divisor
El máximo común divisor (MCD) de dos o más polinomios, es el mayor divisor posible de todos ellos.

Dos polinomios pueden ser divisibles por un mismo polinomio, que se llama entonces común divisor.

De todos los divisores comunes de dos polinomios, se asigna especial interés al divisor común de grado máximo. Esta expresión se denomina máximo común divisor. Veremos a continuación que el máximo común divisor es esencialmente único, y que puede encontrarse por una serie de operaciones regulares.

Sean dos polinomios dados $p(x)$ y $q(x)$. Dividiendo $p(x)$ por $q(x)$, sea $c(x)$ el cociente y $r(x)$ el resto tal que

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x)$$

Si $r(x)$ no es un polinomio idénticamente nulo, podremos continuar dividiendo $q(x)$ por $r(x)$, obteniendo un cociente $c_1(x)$ y el resto $r_1(x)$ tal que

$$q(x) = c_1(x)r(x) + r_1(x)$$

Nuevamente, si $r_1(x)$ no es idénticamente nulo, la división de $r(x)$ por $r_1(x)$ lleva a otra identidad

$$r(x) = c_1(x)r_1(x) + r_2(x); \text{...etc.}$$

Desde que el grado de los polinomios $q(x)$, $r(x)$, $r_1(x)$, ... disminuye y las operaciones pueden continuarse mientras el último resto obtenido no sea un polinomio idénticamente nulo, debemos llegar a un resto $r_n(x)$ que divida exactamente al resto precedente, de manera que tendremos n identidades:

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x)$$
$$q(x) = c_1(x)r(x) + r_1(x)$$
$$r(x) = c_1(x)r_1(x) + r_2(x)$$
$$...$$
$$r_{n-2}(x) = c_{n-1}(x)r_{n-1}(x) + r_n(x)$$
$$r_{n-1}(x) = c_n(x)r_n(x).$$

De estas identidades puede inferirse lo siguiente:

a) Que $r_n(x)$ es un divisor común de $p(x)$ y $q(x)$.

b) Que cualquier divisor de estos polinomios divide a $r_n(x)$.

Se cumplen en las expresiones literales las siguientes propiedades:

1.- El MCD de dos o más expresiones enteras es el producto de sus factores primos comunes, numéricos y literales, elevados a las potencias de menor exponente que de ellos aparezcan en la descomposición de dichas expresiones.

2.- Toda cantidad entera que divida a dos o más expresiones enteras, divide también al MCD de estas.

3.- Si dos o más cantidades enteras se multiplican o dividen por una misma cantidad, el MCD quedara multiplicado o dividido por la misma.

4.- Si dos o más expresiones enteras se dividen por su MCD, los coeficientes serán primos entre sí.

5.- El MCD de dos o más expresiones enteras no varía aunque se multiplique o divida una de ellas por otra cantidad entera prima con las restantes, ya que entonces los factores primos comunes de dichas expresiones serán los mismos después de la multiplicación o división por la cantidad prima.

6.- El MCD de tres o más expresiones enteras es el mismo que el de todas ellas, excepto dos, y el MCD de estas dos.

Para hallar el MCD de polinomios deben tenerse en cuenta los siguientes principios:

i) El MCD de dos polinomios, cuando la división es exacta, es el divisor, lo cual es evidente.

ii) El MCD de dos polinomios, cuando la división es inexacta, es el mismo que el del divisor y el resto, siempre que el cociente y el resto obtenidos sean enteros.

Ejemplo 5.22 *Encuentre el mcd de los siguientes polinomios:*

$$\begin{cases} p(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \\ q(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 \end{cases}$$

Solución

El primer paso para el desarrollo del algoritmo de Euclides es dividir $p(x)$ por $q(x)$. La división se realiza con los coeficientes separados como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc|ccccc}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & -1 & -2 \\
-1 & -4 & -4 & 1 & 2 & & & 1 & -2 & 4 & & \\
\hline
 & -2 & -4 & 2 & 5 & & & & & & & \\
 & 2 & 8 & 8 & -2 & -4 & & & & & & \\
\hline
 & & 4 & 10 & 3 & -1 & 2 & & & & & \\
 & & -4 & -16 & -16 & 4 & 8 & & & & & \\
\hline
 & & & -6 & -13 & 3 & 10 & & & & &
\end{array}$$

El primer resto es

$$r(x) = -6x^3 - 13x^2 + 3x + 10$$

Ahora tenemos que dividir $p(x)$ por $r(x)$. Esta división introducirá coeficientes fraccionarios y, para evitar este inconveniente, podemos multiplicar $q(x)$ por 6; de esta manera $s(x)$ estará multiplicado por una constante, la cual no tiene importancia para nuestro propósito. La siguiente operación es, por lo tanto:

$$\begin{array}{ccccc|cccc}
6 & 24 & 24 & -6 & -12 & -6 & -13 & 3 & 10 \\
-6 & -13 & 3 & 10 & & -1 & -11 & & \\
\hline
 & 11 & 27 & 4 & -12 & & & &
\end{array}$$

Nuevamente, para evitar fracciones, multiplicamos los números de la última fila por 6; esto cambia el resto final de manera que en lugar del $s(x)$ que obtendríamos por el procedimiento normal, tendremos $s(x)$ multiplicado por una constante. La operación continua así:

66	162	24	-72
-66	-142	33	110
	19	57	38

Todos los coeficientes tienen aquí el factor 19; simplificando podemos tomar como $s(x)$, al siguiente polinomio

$$s(x) = x^2 + 3x + 2$$

Téngase en cuenta que en la fila en la que se escriben los coeficientes del cociente, los números ya no representan dichos coeficientes. Pero esto no tiene importancia, ya que no nos interesan los coeficientes, sino solamente los restos y de estos no nos preocupan los factores constantes. Ahora tenemos que dividir $r(x)$ por $s(x)$. Esta división se realiza de la siguiente manera:

-6	-13	3	10	1	3	2
6	18	12		-6	5	
	5	15	10			
	-5	-15	-10			
	0	0	0			

Este procedimiento finaliza con resto nulo. Por lo tanto las operaciones terminan aquí y el MCD pedido es:

$$x^2 + 3x + 2$$

Definición 5.13 Mínimo común múltiplo
El mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más polinomios, es el menor polinomio distinto de cero que es múltiplo de todos ellos.

El mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más polinomios, es el menor polinomio distinto de cero que es múltiplo de todos ellos.

Si el producto de dos polinomios lo dividimos por su MCD, el cociente es el mínimo común múltiplo.

El cálculo del mínimo común múltiplo de más de dos polinomios, consiste en hallar el de dos de ellos y después hallar el mcm del siguiente polinomio con el mcm de los dos primeros y así sucesivamente hasta el último polinomio.

Ejemplo 5.23 *Encuentre el mcm de los siguientes polinomios:*

$$\begin{cases} p(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \\ q(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 \end{cases}$$

Solución
El mcm lo calculamos de la siguiente manera: multiplicamos los dos polinomios

$$p(x)q(x) = x^{10} + 6x^9 + 12x^8 + 8x^7 + 3x^6 + 15x^5 + 25x^4 + 15x^3 - x^2 - 8x - 4$$

Dividimos este polinomio para el MCD $= x^2 + 3x + 2$ y obtenemos

$$\text{mcm} = x^8 + 3x^7 + x^6 - x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x - 2$$

5.9.2. Por factorización

En el caso menos frecuente en que se dan polinomios en forma factorizada, su MCD se calcula por el procedimiento ordinario. En efecto, éste es el producto de todos los polinomios primos que se encuentran en las diversas factorizaciones, pero con exponentes iguales al menor de los que aparecen en cada una de las descomposiciones en irreducibles. Este procedimiento es relativamente limitado.

Ejemplo 5.24 *Encuentre el MCD de los siguientes polinomios:*

$$\begin{cases} p(x) = x^8 - 2x^6 + x^5 + 2x^2 - x - 1 \\ q(x) = x^8 + x^5 + x^4 - x - 2 \end{cases}$$

Solución
Factorando estos polinomios dentro de los reales, obtenemos:

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4 - 2x^2 + x + 1)$$

$$q(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4 + x + 2)$$

Por lo tanto:

$$\text{MCD} = (x+1)(x-1)(x^2+1).$$

El mcm de dos polinomios distintos de cero $p(x)$ y $q(x)$ es el polinomio $h(x)$ con coeficiente inicial uno que es divisible por $p(x)$ y $q(x)$ y cuyo grado es el menor de todos los grados de aquellos polinomios no nulos divisibles por $p(x)$ y $q(x)$. Puede verse que si a_0, b_0 son los coeficientes iniciales respectivos de $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente y si $d(x)$ es su MCD, entonces

$$\frac{p(x)q(x)}{a_0 b_0 d(x)}$$

es su mcm $h(x)$. El mcm de un conjunto de polinomios $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_k(x)$ puede calcularse usando la propiedad de que si $h_i(x)$ es el mcm de $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_i(x)$ entonces el mcm de $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_i(x)p_{i+1}(x)$ es igual al mcm de $h_i(x)$ y $p_{i+1}(x)$.

Ejemplo 5.25 *Encuentre el mcm de los siguientes polinomios:*

$$\begin{cases} p(x) = x^8 - 2x^6 + x^5 + 2x^2 - x - 1 \\ q(x) = x^8 + x^5 + x^4 - x - 2 \end{cases}$$

Solución
Factorando estos polinomios dentro de los reales, obtenemos:

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4 - 2x^2 + x + 1)$$

$$q(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4 + x + 2)$$

Por lo tanto:

$$\text{mcm} = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4 - 2x^2 + x + 1)(x^4 + x + 2).$$

5.10. Tarea

1. Determine el MCD y mcm entre los polinomios:

a) $\begin{cases} p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 \\ q(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \\ q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} p(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 \\ q(x) = x^3 - 3x - 2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} p(x) = 2x^5 + 4x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 \\ q(x) = 6x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} p(x) = 2x^6 + 3x^5 + x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \\ q(x) = x^4 - x^3 - x - 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} p(x) = 10x^6 - 9x^5 - 12x^4 + 2x^2 - x - 1 \\ q(x) = 4x^5 + x^4 - 7x^3 - 8x^2 - x + 1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} p(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \\ q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \\ q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} p(x) = x^3 - 2x + 4 \\ q(x) = x^6 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x + 2 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} p(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10 \\ q(x) = x^3 - 7x + 6 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} p(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \\ q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \end{cases}$;

l) $\begin{cases} p(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12 \\ q(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \end{cases}$.

2. Determine los valores de k, para que $x - k$ sea el MCD de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$. ¿Cuál es el mcm?:

a) $\begin{cases} p(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 \\ q(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} p(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3 \\ q(x) = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 80x - 75 \end{cases}$.

3. Determine los valores de k, para que $x^2 + kx + k$ sea el MCD de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$. ¿Cuál es el mcm?:

a) $\begin{cases} p(x) = x^5 - 2x^4 - 11x^3 + 15x^2 + 18x + 27 \\ q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} p(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 16x - 6 \\ q(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 5x^2 - 4x + 6 \end{cases}$.

4. Determine los valores de k, para que el polinomio $h(x)$ sea el MCD entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$. ¿Cuál es el mcm?:

a) $\begin{cases} p(x) = kx^4 - (10k-3)x^3 + (25k-29)x^2 + 65x + 25 \\ q(x) = kx^4 + (10k+3)x^3 + (25k+31)x^2 + 85x + 25 \\ h(x) = 2x^2 + 3x + 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} p(x) = x^4 + (k-1)x^3 - (k-4)x^2 + (3k-1)x + 3 \\ q(x) = x^4 + (k-2)x^3 - 2(k+7)x^2 - (15k+2)x - 15 \\ h(x) = x^2 - 3x + 1 \end{cases}$.

5. Hallar el MCD de tres polinomios P_1, P_2, P_3, si se conoce que el MCD de P_1 y P_2 es $x^2 - x - 2$ y el MCD de P_2 y P_3 es $x^4 + 5x^2 + 8x + 2$.
Resp: $x + 1$.

6. Dada la fracción

$$\frac{x^3 + 2ax^2 + (2a+1)x + 6}{x^3 + 2bx^2 + (2b+1)x + 10}$$

Hallar a y b para que sea simplificable. Determinar el MCD del numerador y denominador si se sabe que es de la forma $x^2 + px + q$.
Resp: $\text{MCD} = x^2 + x + 2$, $a = 2$ y $b = 1$.

7. Hallar a y b y el MCD para que la fracción simplificada sea

$$\frac{x^3 + (a+2)x^2 + (2a-15)x - 15a}{x^3 + (b+2)x^2 + (2b-15)x - 15b} = \frac{x+2}{x+1}$$

Resp: $\text{MCD} = x^2 + 2x - 15$, $a = 2$ y $b = 1$.

8. El MCD entre P_1 y P_2 es $(x+2)(x-1)$, y su mcm es $(x-1)^2(x^2-4)(x-3)$. Determinar P_2 si se conoce que P_1 es $x^3 - 3x + 2$.
Resp: $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$.

9. El MCD y el mcm de dos polinomios P_1 y P_2 de igual grado son respectivamente $x + 1$ y $x^3 + 2x^2 - x - 2$. Si se conoce que el término independiente del polinomio P_2 es positivo, determinar $P = 2P_1 - 3P_2$.
Resp: $-x^2 - 9x - 8$.

10. Hallar dos polinomios de cuarto grado si:

$$\begin{cases} \text{MCD} = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\ \text{mcm} = 2x^5 - 4x^4 - 2x + 4 \end{cases}$$

Resp: $p_1(x) = 2x^4 + 2$, $p_2(x) = 2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 4$.

11. Tres polinomios de igual grado tienen como MCD a $2x^2 + x - 6$ y como mcm $2x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 15x^2 + 8x - 12$. Determine dichos polinomios.
Resp: $p_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$, $p_2(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$, $p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$.

12. El MCD de $P(x)$ y $R(x)$ es $x^2 + x + 1$ y el mcm de los dos polinomios es $x^4 + x^3 - x - 1$. Hallar $2P(x) - 3R(x)$, si se conoce que los polinomios $P(x)$ y $R(x)$ son de igual grado.
Resp: $-x^3 - 6x^2 - 6x - 5$.

13. Determine $P_2(x)$ si se conoce que:

$$\begin{cases} \text{MCD} = (2x+3)(x-5) \\ p_1(x) = (3x+3)(x^2 - 12x + 35) \\ \text{mcm} = 2(x^2 - 12x + 35)(2x^2 - 7x - 15) \end{cases}$$

Resp: $p_2(x) = (2x+3)(x-5)(2x-10)$.

5.11. Fracciones algebraicas

Si no se indica explícitamente la región en la que se estudia cierta igualdad, entonces ésta se examina en el dominio de dos expresiones que figuran en los miembros primero y segundo de la igualdad. Por ello, en adelante no se indicará explícitamente la región en la cual se verificará una igualdad, tomando en consideración que ésta es valida en el dominio de dos expresiones que figuran en los miembros primero y segundo de la igualdad.

En una serie de casos se necesita representar una fracción en forma de una suma de fracciones con denominadores más simples. Esto puede realizarse sólo en el caso cuando el polinomio en el denominador de la fracción se descompone en un producto de polinomios de grado menor.

Definición 5.14 Fracción algebraica
Se denomina fracción algebraica una expresión racional fraccional que es el cociente de la división de un polinomio por otro.

La fracción algebraica que representa el cociente de la división del polinomio $p(x)$ por otro polinomio $q(x)$ se escribe frecuentemente como $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, con la particularidad de que el polinomio $p(x)$ se denomina numerador de la fracción algebraica, y el polinomio $q(x)$, denominador de la fracción.

A continuación se dan algunas de las propiedades más importantes sobre la igualdad de las fracciones algebraicas:

1. Si se designa la fracción algebraica $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con el polinomio $h(x)$, donde $q(x) \neq 0$, son equivalentes las igualdades

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y} \quad p(x) = h(x)q(x).$$

2. Dos fracciones $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{r(x)}{h(x)}$, donde $q(x) \neq 0$ y $h(x) \neq 0$, son iguales si y sólo si, se verifica la igualdad

$$p(x)h(x) = q(x)r(x).$$

3. En la fracción algebraica $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, se verifica la igualdad

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{[-p(x)]}{[-q(x)]} = -\frac{p(x)}{[-q(x)]} = -\frac{[-p(x)]}{q(x)}.$$

4. Para cualquier polinomio $h(x) \neq 0$, en la fracción algebraica $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, se verifica la igualdad

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)h(x)}{q(x)h(x)}.$$

5. En la fracción algebraica $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, se verifica la igualdad

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p(x) \cdot \frac{1}{q(x)}.$$

6. En la fracción algebraica $\dfrac{1}{p(x)q(x)}$, donde $p(x) \neq 0$ y $q(x) \neq 0$, se verifica la igualdad

$$\frac{1}{p(x)q(x)} = \frac{1}{p(x)} \cdot \frac{1}{q(x)}.$$

7. En las dos fracciones algebraicas $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{q(x)}{p(x)}$, donde $p(x) \neq 0$ y $q(x) \neq 0$, se verifica la igualdad

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{\frac{p(x)}{q(x)}}.$$

Haciendo uso de las propiedades de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas y de las propiedades de fracciones algebraicas, resulta que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{h(x)} = \frac{p(x)h(x) + q(x)r(x)}{q(x)h(x)} \quad \text{y} \quad \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{h(x)} = \frac{p(x)r(x)}{q(x)h(x)}.$$

A menudo se requiere reducir a un denominador común las fracciones algebraicas, es decir, escribirlas de un modo tal, que todas estas fracciones tengan un mismo denominador. Para esto existe el procedimiento siguiente: es menester descomponer cada denominador en factores y, a continuación, multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el producto de aquellos factores de los denominadores de las fracciones restantes que no figuran en el denominador dado, lo que no los hará variar, según las propiedades de las fracciones.

Ejemplo 5.26 *Simplifique las expresiones:*

a) $\dfrac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$; **b)** $\dfrac{3x}{x^3 - 8} \div \dfrac{x^2 - 4}{4(x^2 + 2x + 4)}$;

c) $\dfrac{x^2 - 1}{(x-1)x + 1} + \dfrac{12x}{(1-x)x - 1}$.

Solución

a) Factoramos numerador y denominador:

$$\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x-2)^2(x^2+4)} = \frac{x+2}{x-2};$$

b) Factoramos numerador y denominador:

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x^3-8}\cdot\frac{4(x^2+2x+4)}{x^2-4} &= \frac{3x}{(x-2)(x^2+2x+4)}\cdot\frac{4(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{3x}{x-2}\cdot\frac{4}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{12x}{(x-2)^2(x+2)}.\end{aligned}$$

c) Factoramos numerador y denominador:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{(x-1)x+1}-\frac{12x}{(x-1)x+1} &= \frac{(x^2-1)-12x}{(x-1)x+1}\\ &= \frac{x^2-12x-1}{x^2-x+1}.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.27 *Simplifique las expresiones:*

a) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+9y^4}{x^2-2xy+3y^2}$; **b)** $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x^2+3x}{4-x^2}-\dfrac{x+1}{3x-6}$;

c) $\left(\dfrac{8x^2y}{12y^2z}\div\dfrac{xyz}{x^3y^2z}\right)\div\dfrac{15x^2y^2z}{3xyz}$.

Solución

a) Factoramos numerador y denominador:

$$\frac{(x^2+2xy+3y^2)(x^2-2xy+3y^2)}{x^2-2xy+3y^2}=x^2+2xy+3y^2;$$

b) Factoramos numerador y denominador:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2}+\frac{x(x+3)}{(2-x)(2+x)}-\frac{x+1}{3(x-2)} &= \frac{3x(x-2)-3x(x+3)-(x+1)(x+2)}{3(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{x^2+18x+2}{3(x+2)(2-x)};\end{aligned}$$

c) Factoramos numerador y denominador:

$$\begin{aligned}\frac{8x^2y}{12y^2z}\cdot\frac{x^3y^2z}{xyz}\cdot\frac{3xyz}{15x^2y^2z} &= \frac{2x^2}{3yz}\cdot x^2y\cdot\frac{1}{5xy}\\ &= \frac{2x^3}{15yz}.\end{aligned}$$

5.12. Tarea

1. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-2}{x+x^2}+\dfrac{1}{x}$;

b) $\dfrac{1-x}{x+1}+\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

c) $\dfrac{x-2}{x^2+6x+9}\cdot\dfrac{x+3}{x^2-41}$;

d) $\dfrac{5x}{2x-6}+\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x^2-6}{x^2-9}$;

e) $\dfrac{x^2-4x+4}{3x} : \dfrac{x-2}{x^2+6x}$;

f) $\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x-3}{x^2+4x+4}$;

g) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1} : \dfrac{x+1}{x-1}$;

h) $\dfrac{3xy}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{6x^2y} \cdot \dfrac{x}{x+y}$;

i) $\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3+1} \cdot \dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+1}$;

j) $\dfrac{x-2y}{y} + \dfrac{y+3x}{x} - 3$;

k) $\dfrac{2x}{x-3y} - \dfrac{3y}{x+3y} - \dfrac{x^2+3xy+18y^2}{x^2-9y^2}$;

l) $\dfrac{bx-b}{x+1} + \dfrac{3bx}{x-1} + \dfrac{3bx^2+bx+2b}{1-x^2}$;

m) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{2xy}$;

n) $\left(1 - \dfrac{x-y}{x+y}\right) : \left(\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y}\right)$.

2. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{|3-x|}{|2x+1|+|x-2|-6}$, si $0<x<2$;

b) $\dfrac{|\sqrt{2}+1|+|1-\sqrt{2}|}{|x^2-x+1|+x-x^2+|\sqrt{3}-1|}$;

c) $\dfrac{||3x-10|-|2x-7|-3|}{3x-18}$, si $4<x<5$.

Resp: a) -1; **b)** $2\sqrt{\frac{2}{3}}$; **c)** $-\frac{1}{3}$.

3. Simplifique las expresiones:

a) $\left(\dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{6y}{y^2-4x^2} - \dfrac{4}{2x+y}\right) \div \dfrac{x^2}{4x^2-y^2}$;

b) $\left(\dfrac{x-2}{x^3+1} + \dfrac{1}{x^3-x^2+x}\right) \cdot \dfrac{x^3-x}{x^2+1} + \dfrac{2}{x^3+x^2+x+1}$;

c) $\left[\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2+4\right] \div \left[\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2+4\right] \div \dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$;

d) $\dfrac{y^2-100}{x^2-y^2} \div \dfrac{y+10}{x-y} + \dfrac{x-y}{x^2+2xy+y^2} \cdot \dfrac{y^2+xy}{y^2-xy}$;

e) $\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4} \div \dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\right) \cdot \dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$;

f) $\left(\dfrac{x^2-4x-45}{x^2-14x-15} \div \dfrac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}\right) \div \left(\dfrac{y^2-4}{y^2-121} \cdot \dfrac{y+11}{y+2}\right)$;

g) $\left(\dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{6}{1-4x^2} - \dfrac{4}{2x+1}\right) \div \left(1 - \dfrac{4x^2+1}{4x^2-1}\right)$;

h) $\left(\dfrac{x^2-2x+4}{4x^2-1} \cdot \dfrac{2x^2-x}{x^3+8} - \dfrac{x+2}{2x^2+x}\right) \div \dfrac{4}{x^2+2x} - \dfrac{x+4}{3-6x}$;

i) $\left[\dfrac{z^3-8}{z+x} \div \left(\dfrac{z-2}{4z} \cdot \dfrac{8z^3}{z^2+xz}\right)\right] \div \dfrac{z^2+2z+4}{2z(x-z)}$;

j) $\left(\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right) \cdot \dfrac{x^6-y^6}{x^2y^2} + \dfrac{x^3-y^3}{xy}$;

k) $\dfrac{x}{y}\left\{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\left[\dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{y^4}{x^4}\right)\right]\right\}$;

l) $\dfrac{6xy-14y}{x-2} \cdot \dfrac{x^2-4}{4x^2+x-14} \cdot \dfrac{4x-7}{4x^2} \div \dfrac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}$;

m) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left(\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y}\right)$;

n) $\dfrac{(x-z)(x-u)}{(y-z)(y-u)}+\dfrac{(x-u)(x-y)}{(z-u)(z-y)}+\dfrac{(x-y)(x-z)}{(u-y)(u-z)}$;

o) $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}-\dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}-\dfrac{x^4-y^4}{(x^2+y^2)(x-y)}$;

p) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$;

q) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}\cdot\left(\dfrac{(x+2)^2-x^2}{4x^2-4}-\dfrac{3}{x^2-x}\right)$;

r) $\left(\dfrac{x^2+y^2+xy}{x^3-y^3}\div\dfrac{a^3b-2a^2b+4ab}{a^3+8}\right)\div\dfrac{x^2-2x+1}{3x^3+7x-10}$;

s) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{3}{(x+1)(x^2+5x+6)}$;

t) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}$;

u) $\dfrac{6x^3+48x^2}{x^3+64}+\dfrac{x^2-4}{x+4}-\dfrac{3x^2}{x^2-4x+16}$;

v) $\dfrac{1}{x^2+4x+4}-\dfrac{4}{x^4+4x^3+4x^2}+\dfrac{4}{x^3+2x^2}$;

w) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}\div\left(\dfrac{(x+2)^2-x^2}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^2-x}\right)$;

x) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left[(x-y)^2+xy\right]+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\left[(x+y)^2-xy\right]$;

y) $\dfrac{x^2+x-2}{x^{n+1}-3x^n}\cdot\left(\dfrac{(x+2)^2-x^2}{4x^2-4}-\dfrac{3}{x^2-x}\right)$;

z) $\dfrac{(c-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

4. Simplifique las expresiones:

a) $\dfrac{\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{2x+1}{2x-1}}{\dfrac{2x}{4x^2-1}-\dfrac{1}{2x-1}}$;

b) $\dfrac{\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x-2}{2}}{\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}}$;

c) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+2}{\dfrac{1}{x^2-1}-4}$;

d) $\dfrac{\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2}-1}{\dfrac{x-y}{x+y}-1}$;

e) $\dfrac{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+\dfrac{x^2-a^2}{x2+a^2}}$;

f) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x+\dfrac{1}{x+1}}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}}$;

g) $\dfrac{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{xy-1}{y^2-x^2}}{\dfrac{x^2-1}{(y-x)^2}\cdot\left(\dfrac{y-1}{x-1}-1\right)}$;

h) $\dfrac{\dfrac{x}{x^2-4y^2}+\dfrac{x-2y}{x}}{\dfrac{x^2-4y^2}{x}+\dfrac{x}{x-2y}}$;

i) $\dfrac{x^2-1\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x^2-1}-(x-1)}$;

j) $$\dfrac{\dfrac{x^2}{y^4}-\dfrac{y^2}{x^4}}{\dfrac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2y^2}};$$

k) $$\dfrac{\dfrac{1}{x^2-2x-2}-\dfrac{1}{x^2+2x+2}}{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x^2+4}{x^4+4}\right)\cdot\dfrac{1}{x^4-4(x+1)^2}};$$

l) $$\dfrac{\dfrac{6x(x+1)-3x^2}{(x+1)^2}}{\dfrac{2x(x+1)-(x+1)^2}{x^2}}.$$

5. Simplifique las expresiones:

a) $$\frac{x^2-x-20}{x^2+5x+4}\cdot\frac{x^2-x}{x^2+x-2}\div\left(\frac{x^2}{x^2+3x+2}\cdot\frac{x^2-2x-15}{x+3}\right);$$

b) $$\frac{y^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x^3-x}{y^3+2y^2}+\frac{3yz^2}{5z^3u}\cdot\frac{15z^2u^2}{9y^2z}-\frac{3z}{(z+1)^2}+\frac{2}{z+1};$$

c) $$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{x^2}{x^3+8}\cdot\frac{x^2-2x+4}{2-x}\right)\div\frac{8}{x^2-4x+4}-\frac{x^2+x+6}{4x+8};$$

d) $$\left\{\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right]\div\frac{8x^3+8x}{x^3+x^2-x-1}+\frac{1}{x+1}\right\}\cdot(1-x^2);$$

e) $$\frac{1}{2(x-y)}-\frac{1}{2(x+y)}+\frac{4}{y^2-x^2}+\left(\frac{x^2}{y^2z^2}\div\frac{u^3x}{yz^3}\right)\cdot\frac{y^4}{xz}\cdot\frac{u^3}{y^3};$$

f) $$\left(\frac{12x^3+24x^2}{14x^2-7x}\div\frac{x^2+2x}{2x-1}\right)\div\left(\frac{16x^2-49}{4x^2+x-14}\div\frac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2}\right);$$

g) $$\left(\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-z)(y-x)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}\right)\div\frac{(u+1)^3-(u-1)^3}{3u^3+u};$$

h) $$\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-4xy-21y^2}\cdot\frac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}\right)\div\frac{1}{x-7y}+\frac{x^2-u^2}{5x^3z^3}\div\left(\frac{x+u}{10x^4}\cdot\frac{2x-2u}{xz^4}\right);$$

i) $$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}+\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}-\frac{2}{x-y}-\frac{2}{y-z}-\frac{2}{z-x}.$$

Capítulo 6

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

6.1. Ecuaciones algebraicas

Definición 6.1 Ecuación
Se denomina ecuación la igualdad que contiene una o varias letras, bajo las cuales se sobreentienden los números incógnitos. Los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación dada, se denominan sus soluciones.

Generalmente las incógnitas se designan con las últimas letras del abecedario latino x, y, z, u, v, ... Si la ecuación contiene sólo una incógnita, generalmente su solución se denomina raíz de la ecuación.

Resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones significa hallar las soluciones, es decir, todos los valores de las incógnitas que satisfacen a la ecuación o al sistema dado.

Definición 6.2 Ecuación algebraica
La ecuación con una incógnita se denomina algebraica si ella se puede reducir de manera que su primer miembro es un polinomio con respecto a la incógnita, y el segundo miembro sea igual a cero. Tal tipo de ecuación se denomina normal. El mayor exponente de la incógnita del primer miembro de la ecuación normal se denomina grado de la ecuación algebraica.

Se denominan coeficientes de una ecuación los factores numéricos o literales de las incógnitas, así como el término independiente, es decir, el término que no contiene incógnitas.

Definición 6.3 Ecuaciones equivalentes
Dos ecuaciones con iguales incógnitas se denominan equivalentes si todas las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda e, inversamente, todas las soluciones de la segunda ecuación sirven también de soluciones de la primera o si ambas ecuaciones no tienen solución.

Las ecuaciones equivalentes tienen las siguientes propiedades:

1. Las ecuaciones $p(x) = q(x)$ y $p(x) - q(x) = 0$ son equivalentes.

2. Las ecuaciones $p(x) = q(x)$ y $p(x) + k = q(x) + k$ son equivalentes para cualquier número real k. Es decir, si a ambos miembros de una ecuación agregamos un mismo número o un mismo polinomio con respecto a la incógnita la nueva ecuación es equivalente a la inicial.

3. Las ecuaciones $p(x) = q(x)$ y $kp(x) = kq(x)$ son equivalentes para todo número real k distinto de cero. Es decir, Si ambos miembros de una ecuación se multiplica o se divide por un mismo número, distinto de cero, la nueva ecuación es equivalente a la inicial.

4. Supongamos que se sabe que para cualquier número real k se verifica la igualdad $p(x) = h(x)$, entonces serán equivalentes las ecuaciones $p(x) = q(x)$ y $h(x) = q(x)$.

Toda ecuación de primer grado con una incógnita puede reducirse a la forma $Ax + B = 0$. El primer miembro de esta ecuación es un polinomio de primer grado respecto a x, y el segundo miembro es igual a cero.

Analizaremos el caso en que $p(x)$ es un polinomio de primer grado, es decir, examinemos la ecuación

$$Ax + B = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = -B \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{B}{A}, \quad A \neq 0.$$

Esta ecuación elemental $x = -\frac{B}{A}$ tiene una raíz única que es el número $-\frac{B}{A}$. Como la ecuación $Ax+B = 0$ equivalente a la ecuación elemental $x = -\frac{B}{A}$, entonces la ecuación $Ax+B = 0$ también tiene una sola raíz, que es el número $-\frac{B}{A}$. De este modo, la ecuación de primer grado con una sola incógnita tiene una sola raíz $x = -\frac{B}{A}$.

Si $A = 0$ y $B \neq 0$, la ecuación no tiene raíces.

Si $A = B = 0$, la solución de la ecuación es un número cualquiera; en este caso la ecuación se denomina indeterminada.

Ejemplo 6.1 *Resolver la ecuación siguiente:*

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{3} - \frac{3x-1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Solución
Realizamos la suma algebraica, igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante

$$\frac{3(x-1) + 2(2x+3) - (3x-1)}{6} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad 4x + 4 = 1$$

$$4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{4}.$$

Ejemplo 6.2 *Resolver la ecuación siguiente:*

$$\frac{2x-5}{11} - \frac{x-2}{7} = 5x - 17\frac{1}{2}$$

Solución
Realizamos la suma algebraica de la expresión

$$\frac{2x-5}{11} - \frac{x-2}{7} = 5x - \frac{35}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{7(2x-5) - 11(x-2)}{77} = \frac{10x-35}{2}$$

$$2(3x-13) = 77(10x-35)$$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación

$$6x - 26 = 770x - 2695 \quad \Rightarrow \quad 764x - 2669 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2669}{764}.$$

Ejemplo 6.3 *Si dos poleas se unen por una correa sus velocidades angulares (revoluciones por minuto) son inversamente proporcionales a sus diámetros, esto es,* $w_1 : w_2 = d_2 : d_1$. *Hallar la velocidad de una polea de 15 centímetros de diámetro unida a otra de 12 centímetros de diámetro, que gira a 100 revoluciones por minuto.*

Solución

Sea w_1 la velocidad conocida, $d_1 = 15$, $w_2 = 100$ y $d_2 = 12$. La fórmula dada nos da

$$\frac{w_1}{100} = \frac{12}{15} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{12}{15} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 80 \text{ rpm.}$$

Ejemplo 6.4 *La presión de un gas en un recipiente a temperatura constante es inversamente proporcional al volumen. Si* $p = 30$ *cuando* $v = 45$, *hallar* p *cuando* $v = 25$.

Solución

Aquí

$$p = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{c}{45} \quad \Rightarrow \quad c = 1350$$

Así, pues $p = \dfrac{1350}{v}$. Si $v = 25$, entonces $p = \dfrac{1350}{25} = 54$.

Este problema también puede resolver de la siguiente manera: Como

$$p_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{c}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Tomando $v_1 = 25$, $p_2 = 30$, $v_2 = 45$, entonces

$$\frac{p_1}{30} = \frac{45}{25} \quad \Rightarrow p = 54.$$

Ejemplo 6.5 *Se obtienen polvos para blanquear (hipoclorito de calcio) por reacción del cloro y la cal apagada; 74,10 kilogramos de cal y 70,91 kilogramos de cloro producen 127 kilogramos de polvos y 18,01 kilogramos de agua. ¿Cuántos kilogramos de cal se necesitan para producir 1000 kilogramos de polvos de blanquear?*

Solución

Sea x el número de kilogramos de cal que se necesitan. Entonces

$$\frac{x}{1000} = \frac{74,10}{127} \quad \Rightarrow \quad 127x = 74100 \quad \Rightarrow \quad x = 583,46 \text{ kilogramos.}$$

Ejemplo 6.6 *La carga de seguridad de una viga horizontal apoyada en ambos extremos es proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura e inversamente proporcional a su longitud. Si una viga de 5 x 10 centímetros de 2,40 metros de longitud soporta 250 kilogramos con seguridad, ¿Cuál será la carga limite segura para una viga de 4 x 8 centímetros y de 6 metros de larga del mismo material?*

Solución

Como

$$S_1 = c \cdot \frac{b_1 d_1^2}{l_1} \quad \text{y} \quad S_2 = c \cdot \frac{b_2 d_2^2}{l_2}.$$

Entonces

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 d_1^2 l_2}{b_2 d_2^2 l_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_1}{500} = \frac{4 \cdot 8^2 \cdot 8}{2 \cdot 4^2 \cdot 20} \quad \Rightarrow \quad S_1 = 1600 \text{ kilogramos.}$$

Ejemplo 6.7 *El perímetro de un parque circular excede en 10 km a su diámetro. ¿Cuánto mide el radio del parque? ¿Cuánto mide el área del parque?*

Solución

Denotemos por P al perímetro del parque y por d su diámetro, dados en kms. Entonces, si r es el radio del parque, se cumplen las ecuaciones

$$P = 2\pi r \quad y \quad d = 2r$$

Ya que P excede a d en 10 kms, entonces $P = d + 10$, o equivalentemente, $2\pi r = 2r + 10$ que es una ecuación lineal en la variable r.
Resolvemos tal ecuación despejando a r

$$2\pi r = 2r + 10 \;\Rightarrow\; 2\pi r - 2r = 10 \;\Rightarrow\; r(2\pi - 2) = 0 \;\Rightarrow\; r = \frac{5}{\pi - 1}$$

De esta manera el radio del parque es $r = \dfrac{5}{\pi - 1}$ km, y por lo tanto, el área A del parque será

$$A = \pi r^2 = r\left(\frac{5}{\pi - 1}\right)^2 = \frac{25\pi}{(\pi - 1)^2} \text{ km}^2.$$

Ejemplo 6.8 *Un sistema de refrigeración de 20 litros se llena con un anticongelante al 25 %. ¿Cuántos litros deben ser extraídos y reemplazados por anticongelante puro, para elevar la concentración a un 45 %?*
Solución
Denotemos por l el número de litros que hay que reemplazar, extrayéndolos con concentración al 25 %, y agregándolos con una concentración al 100 %, para obtener nuevamente 20 litros al 45 %. El proceso se describe por la igualdad

$$20(\text{al } 25\,\%) - l(\text{al } 25\,\%) + l(\text{al } 100\,\%) = 20(\text{al } 45\,\%)$$

es decir

$$20\left(\frac{25}{100}\right) - l\left(\frac{25}{100}\right) + l\left(\frac{100}{100}\right) = 20\left(\frac{25}{100}\right)$$

$$\frac{20 \cdot 25}{100} - \frac{25l}{100} + \frac{100l}{100} = \frac{20 \cdot 45}{100} \quad\Rightarrow\quad \frac{500 - 25l + 100l}{100} = \frac{900}{100}$$

$$75l = 400 \;\Rightarrow\; l = \frac{400}{75} = 5,33$$

De esta manera, se deberían reemplazar 5,33 litros al 25 % por 5,33 litros al 100 % de anticongelante, para tener 20 litros al 45 %.

Ejemplo 6.9 *El tanque de un laboratorio de acuacultura se puede llenar con dos llaves en 50 minutos. Si una de ellas, sola, puede llenarla en una hora y cuarto, ¿cuánto tardará en llenar la otra?*
Solución
Se entiende por T a la capacidad total del tanque, por v_1 a la velocidad de llenado de la primera llave y por v_2 a la velocidad de llenado de la otra llave. Entonces se tiene que

$$v_1 = \frac{\text{capacidad del tanque}}{\text{tiempo de llenado de la primera llave}} = \frac{T}{75}$$

$$v_2 = \frac{\text{capacidad del tanque}}{\text{tiempo de llenado de la segunda llave}} = \frac{T}{t}$$

donde, el tiempo para la primer llave es de 75 minutos (hora y cuarto) y el tiempo de llenado para la otra llave es la incógnita t.

Por otro lado, si v es la velocidad de llenado con las dos llaves, entonces v es la suma de v_1 y v_2, es decir, $v_1 + v_2 = v$. De la definición se tiene además que

$$v = \frac{T}{50} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{50} = \frac{T}{75} + \frac{T}{t} \quad \Rightarrow \quad t = 150$$

Esto es, la segunda llave tendría un tiempo de llenado de $t = 150$ minutos, es decir, de dos horas y media.

Ejemplo 6.10 *Una leona sale a cazar desde su madriguera a una velocidad promedio de 3 km/h y regresa con partes de sus presas a una velocidad promedio de 2 km /h. Si la cacería no puede durar más de 6 horas debido a que tiene que cuidar a sus cachorros, ¿cuánto puede alejarse de su madriguera?*

Solución

Sea D la distancia que puede recorrer a lo más durante su cacería. Ya que tiene que recorrer la misma distancia a otra velocidad, se cumple que

$$\text{Tiempo de ida} + \text{Tiempo de vuelta} = 6\text{horas}$$

Pero de la definición de velocidad promedio

$$\text{Tiempo de ida} = \frac{D}{\text{Velocidad de ida}} = \frac{D}{3} \text{ horas}$$

$$\text{Tiempo de vuelta} = \frac{D}{\text{Velocidad de vuelta}} = \frac{D}{2} \text{ horas}$$

lo cual implica que

$$\frac{D}{3} + \frac{D}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{36}{5} \text{ kilómetros.}$$

Ejemplo 6.11 *Se tienen dos soluciones ácidas una A al 20 % de ácido y la otra B al 60 % de ácido. ¿Cuánto se debería poner de cada solución para obtener 100 ml de una solución al 40 % de ácido?*

Solución

Sea s la cantidad de solución A necesaria para obtener la cantidad requerida al 40 %. Entonces la cantidad B necesaria es de $100 - s$. Esto es, la ecuación que describe el problema es, en mililitros

$$\text{cantidad de} A(\text{al } 20\,\%) + \text{cantidad de} B(\text{al } 60\,\%) = 100(\text{al } 40\,\%)$$

es decir

$$s\left(\frac{20}{100}\right) + (100 - s)\left(\frac{60}{100}\right) = 100\left(\frac{40}{100}\right) \quad \Rightarrow \quad s = 50.$$

De esta manera, se deberán poner 50 ml de la sustancia A y 100 - 50 = 50 ml de la sustancia B.

Ejemplo 6.12 *Si la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ representa la relación entre las lecturas expresadas en grados centígrados y Farhrenheit, de una temperatura, hallar a qué temperatura las dos lecturas serán iguales.*

Solución

De la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ se obtiene la relación para F, $F = \frac{9}{5}C + 32$. Definamos la variable de independencia por T en cada caso, esto es

$$C = \frac{5}{9}(T - 32) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{9}{5}T + 32$$

Entonces las temperaturas F y C coinciden, si y sólo si

$$F = C \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{9}(T-32) = \frac{9}{5}T + 32 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{9}T - \frac{32 \cdot 5}{9} = \frac{9}{5}T + 32$$

$$\frac{5}{9}T - \frac{9}{5}T = 32\left(1 + \frac{5}{9}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{56}{45}T = 32 \cdot \frac{14}{9} \quad \Rightarrow \quad T = -40$$

De esta manera, las lecturas coinciden en $C = -40 = F$.

Ejemplo 6.13 *En un laboratorio de quesos se cuenta con 100 litros de leche con 5 % de grasa. El nivel permitido de grasa en la leche para ser consumida en la ciudad A es de 3,5 %. ¿Cuántos litros de crema pueden separarse para hacer queso con 30 % de grasa, de tal manera que la leche mantenga el nivel de grasa permitido?*

Solución

Sea C la cantidad de crema separada para hacer queso con 30 % de grasa. Entonces se tiene que la ecuación siguiente define el problema:

$$(100 \text{ litros al } 5\,\%) = C(\text{litros al } 30\,\%) + (100 - C)(\text{litros al } 3,5\,\%)$$

Esto es, la ecuación que resuelve al problema se plantea

$$100 \cdot \frac{5}{100} = C \cdot \frac{30}{100} + (100 - C) \cdot \frac{3,5}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{500}{100} = \frac{30C}{100} + \frac{(100-C) \cdot 3,5}{100}$$

$$500 = 30C + 350 - 3,5C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{150}{26,5} = 5,660 \text{ litros}$$

De esta forma, se han de separar 5,66 litros de crema al 30 % para que la leche sobrante, $100 - 5,66 = 94,34$ litros tengan 3,5 % de grasa.

Ejemplo 6.14 *Una bomba que trabaja sola, llena un estanque en 7 horas, otra lo haría en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se llena el estanque si trabajan ambas bombas a la vez?*

Solución

Sea x el número de horas que tarda el estanque en llenarse (si trabajan ambas bombas a la vez) y sea V el volumen total del estanque. Si una bomba llena el estanque en 7 horas (entonces en una hora llenará $\frac{1}{7}$ del estanque), luego en x horas llenará $\frac{x}{7}$ del estanque, es decir, llenará $\frac{xV}{7}$ (unidades de volumen). La otra bomba llena el estanque en 8 horas, entonces en x horas llenará $\frac{x}{8}$ del estanque, es decir, $\frac{xV}{8}$ (unidades de volumen). Como en x horas, las dos bombas juntas llenan al estanque entonces se tiene

$$\frac{xV}{7} + \frac{xV}{8} = V \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{7} + \frac{x}{8} = 1$$

de donde $15x = 56$. Luego, trabajando las dos bombas a la vez, el estanque se llena en $\frac{56}{15}$ horas.

Ejemplo 6.15 *Cuatro estudiantes deciden vivir solos en un departamento y repartir en partes iguales el arriendo mensual. Sin embargo, encuentran que si aumenta en dos el número de estudiantes, su cuota mensual se reduce en 20 dólares. ¿Cuál es el costo del arriendo?*

Solución

Sea x el costo del arriendo. Si hay cuatro estudiantes entonces la cuota mensual de cada uno es de $\frac{x}{4}$. Si aumentan en dos, entonces la cuota mensual será de $\frac{x}{6}$. Dadas las hipótesis del problema se tiene que

$$\frac{x}{4} - 20 = \frac{x}{6} \quad \Rightarrow \quad 6x - 480 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = 240$$

luego el costo del arriendo es de 240 dólares.

Ejemplo 6.16 *En una prueba de matemáticas, el 12 % de los estudiantes de una clase no resolvió un problema, el 32 % lo resolvió con algunos errores y los 14 estudiantes restantes obtuvieron la solución correcta. ¿Cuántos estudiantes había en la clase?*

Solución

Sea x el número de estudiantes, entonces $\frac{12x}{100}$ no resolvieron el problema, $\frac{32x}{100}$ resolvieron con algunos errores el problema, 14 resolvieron el problema correctamente. Luego tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{12x}{100}+\frac{32x}{100}+14=x \quad \Rightarrow \quad 56x=1400 \quad \Rightarrow \quad x=25$$

luego había 25 estudiantes en la clase.

Ejemplo 6.17 *Una tienda de antiguedades compró dos muebles en 345 dólares y después los vendió y obtuvo un beneficio del 40 %. ¿Cuánto pagó por cada mueble si el primero dejó un beneficio de 25 % y el segundo un beneficio del 50 %?*

Solución

Sea x dólares lo que le ha costado el primer mueble, entonces el segundo lo compró en $(345-x)$ dólares. El primero dio un beneficio del 25 %, luego se vendió en $(x+0,25x)$ dólares, es decir $1,25x$ dólares.

El segundo dió un beneficio del 50 %, luego se vendió en $1,50(345-x)$ dólares. Por hipótesis, la tienda compró los dos muebles en 345 dólares y obtuvo un beneficio total del 40 %, luego los dos muebles se vendieron en $1,40\cdot 345=483$ dólares.

Así, obtenemos la ecuación

$$1,25x+1,50(345-x)=483 \quad \Rightarrow \frac{x}{4}=\frac{69}{2} \quad \Rightarrow \quad x=138$$

El primer mueble se vendió en 138 dólares y el segundo en 207 dólares.

Ejemplo 6.18 *Los diámetros de dos cilindros son entre sí como 3 : 4 y sus alturas como 5 : 6.¿Qué tanto por ciento del volumen del mayor de ellos es el volumen del menor?*

Solución

Sean d_1, d_2 los diámetros de los cilindros y h_1, h_2 sus respectivas alturas. Por hipótesis del problema tenemos las siguientes relaciones

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{3}{4}, \qquad \frac{h_1}{h_2}=\frac{5}{6}$$

además la fórmula del volumen de un cilindro es $V=\pi r^2 h$, donde r es el radio del cilindro y h la altura; además $d=2r$ donde d es el diámetro del cilindro.

Con todo lo anterior tenemos que

$$V=\frac{\pi}{4}d^2h$$

y para cada cilindro

$$V_1=\frac{\pi}{4}d_1^2h_1, \qquad V_2=\frac{\pi}{4}d_2^2h_2$$

pero

$$d_1=\frac{3}{4}d_2, \qquad h_1=\frac{5}{6}h_2$$

luego

$$V_1=\frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{4}d_2\right)^2\left(\frac{5}{6}h_2\right)=\frac{45}{96}\cdot\frac{\pi}{4}d_2^2h_2=\frac{45}{96}V_2$$

así

$$V_1=\frac{45}{96}V_2$$

Luego V_1 es el 46,875 % de V_2.

6.2. Tarea

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2 - \dfrac{2x+3}{3x-1} = 0;$

b) $\dfrac{4x-1}{2} - \dfrac{3x+1}{3} = \dfrac{5x}{2};$

c) $3 - \dfrac{5x}{3} + \dfrac{x+3}{2} = 0;$

d) $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{1}{5};$

e) $\dfrac{5}{2} + \dfrac{x-1}{x+1} = 1;$

f) $\dfrac{4x-5}{3} + \dfrac{x-6}{2} = 1;$

g) $1\dfrac{1}{4} - \dfrac{x-6}{x+7} = 2;$

h) $\dfrac{(x-1)-(5x+3)}{3} = 2\dfrac{3}{4};$

i) $3\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2x-3}{3};$

j) $3x - \dfrac{2x+1}{2} = 1;$

k) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3x-4}{2} = 3;$

l) $1\dfrac{2}{5} - x = \dfrac{3x+2}{3}.$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2x}{3} - \dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{2x+2}{5} = 0;$

b) $\dfrac{(3x+5)-(4x+1)}{3} = x-1;$

c) $\dfrac{(x-6)+(8x-1)}{2} = 3x-1;$

d) $\dfrac{3x-2}{4} - \dfrac{2x-1}{2} = x - \dfrac{x+1}{3};$

e) $\dfrac{5x+2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{5x+3}{2} - 1;$

f) $\dfrac{1-6x}{2} - \dfrac{3-2x}{3} = \dfrac{5x}{4} + 3x;$

g) $\dfrac{|x-2|}{2} + \dfrac{x+1}{3} = x;$

h) $\left|\dfrac{2x-3}{2}\right| - \dfrac{2x-3}{2} = x+3;$

i) $|3x-1| + \dfrac{3x+1}{2} = x+2;$

j) $|x-2| + |x-1| = x-3;$

k) $(x-1)(|x|-1) = -0,5;$

l) $\dfrac{7x+4}{5} - x = \dfrac{|3x-5|}{2}.$

3. Despeje la variable indicada en cada uno de los siguientes ejercicios:

a) De la fórmula para la reactancia de un condensador

$$X = \frac{1}{2\pi f C}$$

despejar la variable C.

b) De la relación de la velocidad media de un cuerpo

$$V = \frac{V_t + V_0}{2}$$

despejar la velocidad inicial V_0.

c) De la fórmula

$$\frac{E}{e} = \frac{R+r}{2}$$

de la caída de tensión, despejar a la variable r.

d) Despejar a de la fórmula

$$C = \frac{Kab}{b-a}$$

e) Considere la relación de la distancia recorrida de un cuerpo en caída libre

$$d = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-1)^2$$

despeje la variable t.

f) De la relación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{nx} = \frac{1}{f}$$

despeje a la variable x.

g) La ecuación para una polea diferencial viene dada por

$$W = \frac{2PR}{R-r}$$

despeje la variable R.

h) Despeje la variable n de la ecuación

$$I = \frac{E}{r + \frac{R}{n}}$$

que se refiere a la corriente suministrada por generadores en paralelo.

i) Despeje a la variable w de la ecuación

$$wf = \left(\frac{w}{k} - 1\right)\frac{1}{k}$$

j) De la ecuación de dilatación de gases

$$V_1 = V_0(1 + 0,00365t)$$

despeje la variable t.

4. Cuánta soldadura, con 50 % de estaño, y cuánto metal de imprenta con 15 % de estaño, es necesario alear para obtener 80 kg. de soldadura con un 40 % de estaño?

5. Un tendero calculó que su reserva de azúcar duraría 30 días. Como vendió 20 kilos diarios más de lo que esperaba, su reserva le duró solamente 24 días. ¿De cuántos kilos disponía?

6. Un granjero compró 100 km^2 de tierra por \$ 150.100. Parte de ellos le costaron a \$ 500 por km^2, y el resto a \$ 1800. Hallar el número de km^2 comprados a cada precio.

7. El área de un paseo de 4 mt de anchura que rodea un estanque circular es de 1.496 m^2. Tomando $\pi = \frac{22}{7}$, hallar el diámetro del estanque.

8. ¿Cuánto acero, con un 18 % de tungsteno, debe alearse con otro acero, conteniendo un 12 % de tungsteno, para obtener 3.000 kg de acero al 14, 6 %? Hallar también la cantidad de acero que debe usarse al 12 %.

9. ¿Cuál sería la temperatura final cuando se mezclan 20 kg de agua a $60°C$ con 30 kg de agua a $10°C$? En los problemas de intercambio calorífico que no impliquen un cambio de estado se verifica: masa x calor específico x disminución de temperatura en un cuerpo caliente y x calor específico x aumento de la temperatura en un cuerpo frío.

10. Un reloj mal compensado adelanta 11 seg en 9 horas cuando se lleva verticalmente en el bolsillo, y atrasa 28 seg en 13 horas cuando se deja en posición horizontal. ¿Durante cuántas horas hay que mantenerlo en cada posición para que no gane ni pierda durante un total de 24 horas de funcionamiento?

11. ¿Cuántos litros de solución anticongelante al 35 % deben añadirse a tres litros de solución al 80 %, para reducir su concentración al 60 %?

12. Un trozo de alambre de $11\frac{2}{3}$ centímetros de largo ha de dividirse en dos partes tales que la una sea $\frac{2}{3}$ de la otra. Hallar la longitud de la más corta.

13. Un tren sale de la estación a 40 kilómetros por hora. Dos horas más tarde parte un segundo tren a 60 kilómetros por hora. ¿Dónde alcanzará al primero?

14. Un tanque se vacía por dos tubos, uno de los cuales lo puede vaciar en 30 minutos y el otro en 25 minutos. Si el tanque está lleno en sus $\frac{5}{6}$ y ambos tubos están abiertos, ¿en cuánto tiempo quedará vacío?

15. A puede hacer un trabajo en 10 días. Después de llevar 2 días trabajando, B viene a ayudarle y juntos acaban en 3 días. ¿En cuántos días podría hacer el trabajo B solo?

16. La resistencia resultante de dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo es tal que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Hallar R si $R_1 = 80$ y $R_2 = 240$.

17. ¿A que horas después del mediodía se vuelven a juntar por primera vez las manecillas del reloj?

18. La reacción de 65,4 gramos de cinc y 72,9 gramos de ácido clorhídrico da 136,3 gramos de cloruro de cinc y 2 gramos de hidrógeno. ¿Cuál es el peso de ácido clorhídrico necesario para una reacción completa con 300 gramos de cinc y cuál es el peso del hidrógeno producido?

19. Una máquina de cambiar monedas cambia billetes de un dólar en monedas de 25 y de 5 centavos. Si recibe 12 monedas, después de introducir un billete de 1 dólar, ¿cuántas monedas de cada tipo recibe?

20. Un barco usa receptores de sonido encima y bajo la superficie del agua, para registrar una explosión, que llega 5 segundos antes al receptor sumergido. El sonido viaja en el aire a unos 1050 pies/seg y, en el agua del mar, a unos 4500 pies/seg.

a) ¿Cuánto tiempo tardó cada onda sonora en llegar al barco?
b) ¿A qué distancia del barco se produjo la explosión?

21. Dos empresas le han ofrecido empleo de vendedor. Ambos empleos son esencialmente iguales, pero una empresa le paga solamente una comisión del 8 %, en tanto que la otra le ofrece 51 dólares a la semana, más una comisión del 5 por ciento. Los mejores representantes de ventas, en cualquiera de las dos empresas, rara vez tienen ventas superiores a 4000 dólares por semana. Antes de aceptar una de estas ofertas, necesita usted saber en qué punto pagan lo mismo ambas empresas y cuál de las dos paga mas a ambos lados de dicho punto.

22. La potencia de una máquina de vapor es proporcional a la presión media en el cilindro y a la velocidad de rotación. Si la presión media es 320 newtons por centímetros cuadrados y el volante da 750 revoluciones por minuto la potencia es 100. ¿Cuál es la potencia si la presión media baja a 240 newtons por centímetros cuadrados y las revoluciones a 600 revoluciones por minuto?

23. ¿Cuánta agua hay que usar para preparar una solución a 1:5000 de bicloruro de mercurio con una tableta de 0,5 gramos?

24. El volumen de un cono es proporcional a la altura y al cuadrado del radio. Si el radio es 4 y la altura 6, el volumen es 32π. ¿Cuál debe ser la altura si el volumen es 12π cuando el radio es 2?

25. La ley de Newton de la gravitación dice que la fuerza de atracción entre dos cuerpos varía en proporción directa de sus masas m_1 y m_2 e inversa del cuadrado de la distancia entre ellos. Dos cuerpos cuyos centros están a una distancia de 5000 kilómetros se atraen con una fuerza de 76 newtons. ¿Cuál sería la fuerza de atracción si se triplicaran las masas y la distancia entre los centros se doblará?

26. Si un cuerpo pesa 100 Newton sobre la superficie terrestre, ¿cuál es su peso a 3000 kilómetros de la superficie? Supóngase el radio de la tierra 6000 kilómetros aproximadamente.

27. Un taller de imprenta de un periódico cuente con dos maquinas dobladoras para el acomodamiento final del diario vespertino, cuya circulación es de 35000 ejemplares. La maquina mas lenta puede doblar los periódicos a una velocidad de 6000 por hora, en tanto que la otra los dobla a razón de 9000 por hora. Si el uso de la maquina mas lenta se retrasa media hora, por una leve avería, ¿Cuál será el tiempo total necesario para doblar todo el periódico? ¿Cuánto tiempo empleara cada maquina en esta tarea?

28. Se tiene dos barras de aleación de oro: una es de 12 quilates y la otra de 18 (el oro de 24 quilates es oro puro; el de 12 quilates corresponde a 12/24 de pureza; el de 18, a 18/24 de pureza y así sucesivamente). ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?

29. Un terremoto emite una onda primaria y otra secundaria. Cerca de la superficie de la tierra, la onda primaria viaja aproximadamente a 5 millas/seg, en tanto que la secundaria viaja a 3 millas/seg. Por el retraso entre ambas ondas, al llegar a una estación dada, es posible calcular la distancia a la que ocurrió el temblor. (El epicentro se puede localizar cuando se obtienen las medidas de dicha distancia, en tres o mas estaciones.) Supongamos que una estación midió una diferencia de 16 seg entre la llegada de ambas ondas. ¿Cuánto tiempo viajo cada onda? ¿Y a que distancia de la estación tuvo lugar el terremoto?

30. Si la suma de los dos ángulos agudos de un triangulo rectángulo corresponde a $90°$ y su diferencia es $14°$, encuentre ambos ángulos.

31. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con 124 centímetros de perímetro, si su longitud es 25 % más grande que su anchura.

32. Un químico tiene dos concentraciones de acido clorhídrico: una en solución al 50 % y la otra al 80 %. ¿Qué cantidad de cada una deberá mezclar para obtener 100 ml de una solución al 68 %.

6.3. Sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones en dos incógnitas

Definición 6.4 Ecuación lineal
Se denomina ecuación lineal con dos incógnitas, la ecuación del tipo

$$Ax + By = C.$$

Se aprecia fácilmente que esta ecuación tiene infinitas soluciones, puesto que a una de las incógnitas, se le puede dar valores arbitrarios, y el valor de la incógnita correspondiente a éste se halla de la ecuación. Las coordenadas de cualquier punto de una recta son las soluciones de la ecuación; pero, teniendo en cuenta que los puntos de una recta son infinitos, también las soluciones son infinitas.

El conjunto de dos ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

forma un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El par de números x_0, y_0, que satisfacen a cada ecuación del sistema se denomina su solución.

Supongamos dado un sistema lineal con coeficientes literales

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

donde $B_1 \neq 0$, se requiere hallar su solución. De la primera ecuación expresamos y por x:

$$y = \frac{C_1 - A_1x}{B_1}$$

Este valor de y lo sustituimos en la segunda ecuación:

$$A_2x + B_2\frac{C_1 - A_1x}{B_1} = C_2$$

Obtenemos una ecuación con una incógnita, la que se reduce a la forma

$$A_2B_1x - A_1B_2x = B_1C_2 - B_2C_1 \quad \Rightarrow \quad (A_2B_1 - A_1B_2)x = B_1C_2 - B_2C_1$$

Si el coeficiente de x, es decir, la expresión $A_2B_1 - A_1B_2$, es distinto de cero, ambos miembros de la igualdad anterior se pueden dividir por él; así, obtenemos:

$$x = \frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Después de sustituir este valor de x en la primera igualdad, hallamos:

$$y = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

El sistema dado tiene una sola solución si $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, además, los valores de las incógnitas se calculan por las fórmulas

$$\begin{cases} x = \dfrac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \\ y = \dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \end{cases}$$

1. Si $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, de donde los coeficientes de las incógnitas son proporcionales.
2. Si $B_2C_1 - B_1C_2 = 0$, el sistema es indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
3. Si $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ y $B_2C_1 - B_1C_2 \neq 0$, el sistema es incompatible y no tiene soluciones.

   A cada uno de los tres casos examinados se le puede dar una interpretación geométrica, partiendo de que en el sistema de coordenadas rectangulares a cada ecuación lineal, con dos incógnitas corresponde una recta.

   a) Si $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, dos rectas, representadas por las ecuaciones del sistema, se cortan en un punto; las coordenadas del punto de intersección representan precisamente la solución del sistema.

   b) Si $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ y $B_2C_1 - B_1C_2 =$, las dos rectas correspondientes a las ecuaciones se confunden en una recta común; dado que éstas tienen infinitos puntos comunes, en consecuencia, el sistema también tiene infinitas soluciones.

   c) Si $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ y $B_2C_1 - B_1C_2 \neq 0$, las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema, son paralelas, es decir, no tienen ningún punto común, por lo cual el sistema no tiene soluciones.

Ejemplo 6.19 *Resuelva el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 9x + 3y - 2 = 0 \\ 10x + 6y - 4 = 0 \end{cases}$$

Solución
Aplicando las fórmulas deducidas anteriormente, obtenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12-12}{54-30} = \frac{0}{24} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{36-20}{54-30} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 6.20 *Un hombre puede remar aguas abajo 6 kilómetros en 1 hora y regresar en 2 horas. Hallar su velocidad en agua tranquila y la velocidad de la corriente.*
Solución
Sean
x : velocidad en agua tranquila en kilómetros por hora.
y : velocidad del río en kilómetros por hora.
$x+y$: velocidad con la corriente.
$x-y$: velocidad en contra.
De esta manera obtenemos

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

La velocidad en agua tranquila es $\frac{9}{2}$ kilómetros por hora y la velocidad de la corriente es $\frac{3}{2}$ kilómetros por hora.

Ejemplo 6.21 *Un cierto número de estudiantes deben acomodarse en una residencia. Si se ubicaran dos estudiantes por habitación entonces quedarían 2 estudiantes sin pieza. Si se ubicaran 3 estudiantes por habitación entonces sobrarían 2 piezas. ¿Cuántas habitaciones disponibles hay en la residencia y cuántos estudiantes deben acomodarse en ella?*
Solución
Sean
x : número de estudiantes.
y : número de habitaciones.
Entonces podemos representar el problema mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-3(y-2)=0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-1} = 18, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-1} = 8$$

Por lo tanto hay 8 habitaciones y 18 estudiantes.

Ejemplo 6.22 *Resuelva el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 5x - 3 = -2y \\ 10x + 4y = 6 \end{cases}$$

Solución
De igual forma que en los literales anteriores, obtenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 12}{20 - 20} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}} \frac{30 - 30}{20 - 20} = \frac{0}{0}$$

como los valores de x y y indican una indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces el sistema tiene más de una solución. Para encontrar la solución general a este tipo de sistemas, hacemos $y = t$, entonces por la primera ecuación obtenemos $x = \frac{3-2t}{5}$, para cualquier valor de t.

Ejemplo 6.23 *Resuelva el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 7x = 8 - 7y \\ 16y + 16x - 8 = 0 \end{cases}$$

Solución
Haciendo uso de las fórmulas deducidas anteriormente, obtenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 16 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{128 - 56}{112 - 112} = \frac{72}{0}.$$

como tenemos la división para cero, entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Ejemplo 6.24 *Determine de ser posible los valores de a y b, para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución única, tenga más de una solución, no tenga solución y encuentre la solución general del sistema en términos de a y b:*

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - by = a \\ ax + \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \dfrac{1}{a}x - y = \dfrac{1}{2} \\ x + \dfrac{1}{b}y = \dfrac{a}{b} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + by = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}ax + y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Solución
a) Encontramos la solución general en términos de a y b:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -b \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -b \\ a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2}a + 2b}{\frac{1}{6} + ab} = \frac{3(a + 4b)}{2(1 + 6ab)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & a \\ a & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -b \\ a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} \frac{\frac{2}{3} - a^2}{\frac{1}{6} + ab} = \frac{2(2 - 3a^2)}{1 + 6ab}$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución única, hacemos

$$1 + 6ab \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ab \neq -\frac{1}{6}$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga más de una solución, hacemos

$$\begin{cases} a+4b=0 \\ 2-3a^2=0 \\ 1+6ab=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ b=\mp\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{cases}$$

Para que el sistema de ecuaciones no tenga solución, hacemos

$$1+6ab=0 \quad \Rightarrow \quad ab=-\frac{1}{6}.$$

b) Encontramos la solución general en términos de a y b:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{2b}+\frac{a}{b}}{\frac{1}{ab}+1}=\frac{a(1+2a)}{2(1+ab)}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{a}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} \end{vmatrix}}=\frac{\frac{a}{ab}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{ab}+1}=\frac{a(2-b)}{2(1+ab)}$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución única, hacemos

$$1+ab\neq 0 \quad \Rightarrow \quad ab\neq -1.$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga más de una solución, hacemos

$$\begin{cases} a(1+2a)=0 \\ a(2-b)=0 \\ 1+ab=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=2 \end{cases}$$

Para que el sistema de ecuaciones no tenga solución, hacemos

$$1+ab=0 \quad \Rightarrow \quad ab=-1.$$

c) Encontramos la solución general en términos de a y b:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & b \\ \frac{a}{2} & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{b}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{ab}{2}}=\frac{3-2b}{4-3ab}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & b \\ \frac{a}{2} & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{2}{9}-\frac{a}{4}}{\frac{2}{3}-\frac{ab}{2}}=\frac{8-9a}{6(4-3ab)}$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución única, hacemos

$$4-3ab\neq 0 \quad \Rightarrow \quad ab\neq \frac{4}{3}.$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga más de una solución, hacemos

$$\begin{cases} 3-2b=0 \\ 8-9a=0 \\ 4-3ab=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=\frac{8}{9} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \quad .$$

Para que el sistema de ecuaciones no tenga solución, hacemos

$$4-3ab=0 \quad \Rightarrow \quad ab=\frac{4}{3}.$$

6.4. Tarea

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+5y=3 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x+2y=1 \\ 8x+3y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+5y=9 \\ 3x-8y=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+5y=4 \\ 3x+8y=-1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x+5y=5 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 6x+7y=9 \\ 5x+4y=8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x+7y=3 \\ 5x-6y=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 0,33x+\frac{1}{3}y=1 \\ \frac{1}{2}x+0,5y=2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{3} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{3}{2}x+\frac{3}{4}y=\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=\frac{1}{3} \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2x-0,75y=1\frac{1}{2} \\ -0,52x+3y=\frac{1}{3} \end{cases}$

m) $\begin{cases} \frac{1}{4}x+0,31y=\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y=0,3 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 0,55x+\frac{1}{5}y=0,1 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=0,22 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y=\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y=-1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} \frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}x+3y=-5 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 1,25x+1,35y=1,25 \\ 0,25x-0,35y=0,25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,21x+0,31y=0,41 \\ 0,52x-0,62y=0,72 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -0,1x+0,2y=0,3 \\ x-0,3y=0,4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0,11x+0,12y=0,13 \\ 0,12x-0,13y=0,14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 1,45x+1,25y=0,5 \\ 2,25x-0,25y=1,5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2,03x+2,04y=2 \\ 2,04x-2y=-1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3,12x+3,14y=3 \\ -2,11x+2,13y=-1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2,15x+2,25y=2,5 \\ 3,15x+3,25y=3,5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 0,7x+0,6y=0,5 \\ 0,4x+0,5y=0,3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 1,75x+1,25y=0,5 \\ 1,4x+1,5y=1,3 \end{cases}$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $$\begin{cases} \dfrac{x-2y-1}{3}+\dfrac{0,5x-y+0,25}{2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{1-x+y}{3}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2}+\dfrac{x-3y}{3}=2 \\ \dfrac{x+3y}{3}+\dfrac{3x-y}{2}=-1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{2}-\dfrac{2x-y+3}{3}=2 \\ \dfrac{x+3y-2}{3}+\dfrac{x+y-2}{2}=3 \end{cases}$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 4x-\frac{1}{3}y=0 \\ 2x+\frac{1}{2}y=-1,3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -1\frac{1}{5}x+1\frac{1}{3}y=-1 \\ 1\frac{1}{2}x+1\frac{2}{3}y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=-1 \\ \frac{x-y}{3}+\frac{x+y}{3}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}y=2 \\ 1\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}y=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-3y=\frac{1}{3} \\ -2x+4y=\frac{1}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0,25x-0,35y=-1 \\ 0,35x+0,45y=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 31x+21y=20 \\ 21x-31y=30 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 15x-12y=10 \\ 16x+13y=-1 \end{cases}$

5. Determine de ser posible los valores de a y b, para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución única, tenga más de una solución, no tenga solución y encuentre la solución general del sistema en términos de a y b:

a) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x - (a+1)y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3ay = 2 \\ ax - 3ay = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (2a-1)x + ay = 2 \\ ax - y = a \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax + (3a-2)y = 1 \\ (a+1)x - y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax - y = 3a + 1 \\ (3a+2)x - y = a \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax + 3ay = 3 \\ 2x + 6ay = 2a \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x + (7a-2)y = 3 \\ 5ax - y = 2a \end{cases}$

h) $\begin{cases} (a-1)x + 2ay = 4 \\ 3ax - (a+1)y = 2a \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - (a-2)y = 3 \\ ax + y = -2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x - by = 2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} (a+b)x - y = -1 \\ ax + by = 2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} (a-1)x + y = 3 \\ x + (a+1)y = -1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - y = 2 \end{cases}$

o) $\begin{cases} (2a+1)x - y = a \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$

p) $\begin{cases} (a-b)x + y = 1 \\ ax - y = 2 \end{cases}$

q) $\begin{cases} ax + by = 3 \\ bx + (a+1)y = 2 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x + ay = b \\ ax - y = 1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} bx + (a-1)y = 2 \\ ax + y = b \end{cases}$

t) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ bx + y = 2 \end{cases}$

u) $\begin{cases} ax - by = -2 \\ x - (b+1)y = 1 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2ax - 3y = -3 \\ 3x + 2ay = 1 \end{cases}$

w) $\begin{cases} (a+1)x + by = 2 \\ x + ay = b \end{cases}$

x) $\begin{cases} 0,3x + by = 2,5 \\ ax - 3y = b \end{cases}$

6. A y B están a 30 kilómetros uno del otro. Si parten al mismo tiempo y caminan en la misma dirección A alcanza a B en 60 horas. Si marcha uno hacia el otro se encuentran a las 5 horas. ¿Cuáles son las velocidades?

7. Una aleación contiene tres veces más cobre que plata y otra contiene cinco veces más plata que cobre. ¿Qué cantidad de cada aleación se ha de utilizar para hacer 14 kilogramos con el doble de cobre que de plata?

8. A y B trabajando juntos pueden realizar una tarea en 4 días y $4/5$ de día; B y C juntos la harían en 4 días y A y C juntos en 3 días y $3/7$. ¿Cuántos días gastarían los tres juntos?

9. Si un lote se agranda haciéndolo 10 metros más largo y 5 metros más ancho, su área aumenta en 1050 metros cuadrados. Si su longitud se rebaja en 5 metros y su anchura en 10 metros, el área disminuye en 1050 metros cuadrados. Hallar las dimensiones del lote.

10. Dos trenes de 400 metros de largo cada uno corren sobre vías paralelas. Si van en la misma dirección el uno pasa al otro en 20 segundos; pero si van en direcciones contrarias se pasan en 5 segundos. Hallar la velocidad de cada tren.

11. Un cierto número de personas tiene que pagar a partes iguales un total de 72000 dólares. Si hubiera tres personas menos entonces cada una debería contribuir con 4000 dólares más.

¿Cuántas personas son?

12. Sesenta ejemplares del primer volumen de un libro y 75 ejemplares del segundo volumen cuestan un total de 405000 dólares. Sin embargo, un descuento del 15 % en el primer volumen y de un 10 % en el segundo volumen reducirá el precio total a 355500 dólares. Determine el precio de cada volumen.

13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $3\sqrt{5}$ metros. Determine los catetos sabiendo que cuando se aumenta uno en un $\frac{400}{3}$ % y el otro en un $\frac{50}{3}$ % la suma de sus longitudes vale 14 metros.

14. Dos sacos contienen 140 kilogramos de harina. Si sacamos el $12,5$ % de la harina del primer saco y la hechamos en el segundo, ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuántos kilos de harina tiene cada saco?

15. Dos fábricas A y B se comprometen a servir un pedido en 12 días. Después de dos días la fábrica A cierra para hacer unas reparaciones, mientras que la fábrica B sigue funcionandop normalmente. Sabiendo que B tiene un rendimiento del $\frac{200}{3}$ % del rendimiento de A, determine en cuántos días se servirá el pedido.

16. Un lingote de aleación cobre-zinc que pesa 24 kilogramos se sumerge en agua y pierde $\frac{26}{9}$ kilogramos en peso. Determine la cantidad de cobre y de zinc en la aleación, sabiendo que en el agua el cobre pierde $\frac{100}{9}$ % y el zinc $\frac{100}{7}$ % de su peso.

17. Encuentre un número de dos cifras sabiendo que el cociente que se obtiene al dividirle por el producto de sus dígitos es igual a $\frac{8}{3}$ y, además, que la diferencia que se obtiene entre el número buscado y el número que se obtiene al invertir el orden de los dos dígitos que lo forman es 18.

18. Determine un número de dos cifras sabiendo que el número de unidades excede en dos al número de decenas y que el producto del número deseado por la suma de sus dígitos es 144.

19. Dos trenes salen al mismo tiempo de las estaciones A y B separadas 600 km y viajan uno al encuentro del otro. El primer tren llega a B tres horas antes de que el segundo llegue a A. El primer tren recorre 250 km en el mismo tiempo en que el segundo recorre 200 km. Encuentre la velocidad de cada tren.

20. Un viajero que va a tomar su tren ha cubierto 3,5 km en una hora y se da cuenta que a esa velocidad llegará una hora tarde. Entonces recorre el resto de la distancia a la velocidad de 5 km/hr y llega 30 minutos antes de que salga el tren. Determine la distancia que tenía que recorrer.

21. La distancia entre A y B por autopista es 10 km. Un ciclista sale de A en dirección a B a una velocidad constante. Un coche sale de A 15 minutos más tarde en la misma dirección. Al cabo de 10 minutos alcanza al ciclista y continua hasta B, donde da la vuelta y al cabo de 50 minutos después de haber abandonado A encuentra por segunda vez al ciclista. Determine las velocidades del ciclista y del coche.

22. Un tren correo sale de la estación A a las 5 de la madrugada en dirección de la estación B a 1080 km de distancia. A las 8 de la mañana sale de B un tren en dirección de A y viaja 15 km/hr más aprisa que el tren correo. ¿Cuándo se encontrarán sabiendo que el punto de encuentro es el punto medio entre A y B?

23. A dista 78 km de B. Un ciclista sale de A en dirección de B. Una hora después, otro ciclista sale de B en dirección a A y va 4 km/hr más rápido que el primero. Se encuentran a 36 km de B. ¿Cuánto hace que ha salido cada uno y cuáles son sus velocidades?

24. Una bandeja rectangular de 20 cm x 90 cm x 25 cm (paralelepípedo rectangular) se usará para hacer negativos fotográficos. El agua llega a través de un tubo de goma y sale a través de otro para mantener al agua en agitación. Se necesitan 5 minutos menos para vaciar la bandeja a través del segundo tubo que en llenarla mediante el primero, con el segundo cerrado. Si se abren ambos tubos, la bandeja completa se vaciará en una hora. Encuentre la cantidad de agua que deja pasar cada tubo en un minuto.

25. Dos trabajadores, uno de los cuales empieza a trabajar uno y medio días después que el otro, pueden completar un trabajo en 7 días. Si cada uno de ellos hiciera el trabajo individualmente, el primero habría necesitado 3 días más que el segundo que empezó después. ¿Cuántos días tardará cada obrero en realizar el trabajo individualmente?

26. Dos máquinas perforadoras de túneles trabajando en los dos extremos de un túnel tienen que completar la perforación en 60 días. Si la primera máquina hace el 30 % del trabajo asignado, y la segunda el $\frac{80}{3}$ %, entonces ambas perforarán 60 metros de túnel. Si la primera máquina ha realizado $\frac{2}{3}$ del trabajo asignado a la segunda, y la segunda 0,3 del trabajo asignado a la primera, entonces la primera máquina necesitaría 6 días más que la segunda. Determine cuántos metros de túnel perfora cada máquina por día.

27. Dos cuadrillas de ferroviarios trabajando conjuntamente terminan una reparación de la sección de una vía en 6 días. Para hacert el 40 % del trabajo, la primera cuadrilla sola necesitaría dos días más de lo que la segunda cuadrilla sola necesitará, para realizar $\frac{40}{3}$ % del trabajo completo. Determine cuántos días tardaría cada cuadrilla en reparar la sección completa por separado.

28. Dos obreros juntos completan una cierta tarea en 8 horas. Trabajando individualmente, el primer obrero podría hacer el trabajo 12 horas más aprisa que lo podría hacer el segundo. ¿Cuántas horas tardaría cada obrero en hacer individualmente el trabajo?

29. Dos tuberías tardan 6 horas en llenar una piscina. Una sola la llenaría 5 horas más deprisa que la otra. ¿Cuánto tardará cada tubería sola en llenar la piscina?

30. Dos ruedas están girando accionadas por una correa sin fin; la más pequeña da 400 revoluciones por minuto más que la grande. Esta da 5 revoluciones en un lapso de tiempo que es un segundo mayor que el necesario para que la más pequeña de 5 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones por minuto da cada una?

31. Dos motores de combustión interna se sometieron a un ensayo de rendimiento y se encontró que uno de ellos había consumido 600 gramos de combustible mientras que el otro, que había funcionado 2 horas menos, consumió 384 gramos. Si el primer motor consumiera la misma cantidad de combustible por hora que el segundo y el segundo lo mismo que el primero, entonces ambos motores consumirían la misma cantidad de combustible durante el mismo período de funcionamiento que antes. ¿Cuánto combustible consume por hora cada motor?

32. Cuatro grúas de puerto idénticas se usan para cargar un barco. Cuando llevan 2 horas trabajando, se ponen a trabajar con ellas 2 grúas más de menor capacidad, con lo que se completa la carga en 3 horas. Si hubieran empezado a trabajar todas juntas, se habría completado la carga en 4,5 horas. Determine el tiempo (en horas) necesario para que realice el trabajo completo una grúa sola de las más potentes y una grúa sola de las de menor potencia.

33. Un estanque con cierta cantidad de agua tiene forma de cono invertido. Al agregarle 10 litros, el nivel de agua sube en un 20 %. Si la base del cono fuese reducida en 40 %, manteniendo la misma altura resultaría un cono que estaría lleno con la cantidad de agua inicial. Sabiendo que la altura del estanque es 50 cm. Calcular el radio inicial y el volumen de agua contenido en un comienzo.

6.5. Sistemas de ecuaciones lineales de más de 2 variables

Definición 6.5 Ecuación lineal
Una ecuación lineal sobre $\mathbb{R}$ en n variables es una expresión de la forma $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n = b$ donde los a_i, b son números conocidos y los x_i son variables. Los a_i se denominan coeficientes de los x_i respectivos, y b es el término independiente de la ecuación.

Una solución de la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ es un conjunto ordenado de n valores k_1, k_2, ..., k_n tales que $a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n = b$.

Definición 6.6 Sistema de ecuaciones lineales
Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables, es una expresión de la forma

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + ... + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{2n}k_n = b_2 \\ \qquad \qquad ... \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + ... + a_{mn}k_n = b_m \end{cases}$$

donde los a_{ij} y los b_i pertenecen a los números reales. El primer subíndice en los coeficientes indica el número de la ecuación, y el segundo, el número de la variable. Para un sistema de m ecuaciones *lineales en n variables x_i, $i = 1, 2, ..., n$, el conjunto solución S es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por $S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_m$ donde S_i es el conjunto solución de la i-ésima ecuación, $i = 1, 2, ..., m$.*

Una solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es un conjunto ordenado de n valores k_1, k_2, ..., k_n tales que

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + ... + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + ... + a_{2n}k_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + ... + a_{mn}k_n = b_m \end{cases}$$

Para cualesquiera sistemas de ecuaciones lineales, se presentan tres tipos de conjunto solución:

1. Un conjunto solución que contiene solamente un elemento. Se dice que el sistema tiene solución única y se denomina sistema compatible determinado;

2. Un conjunto solución que contiene más de un elemento. En este caso se dice que el sistema tiene más de una solución y se denomina sistema compatible indeterminado;

3. Un conjunto solución vacío. Se dice que el sistema no tiene solución y se denomina sistema incompatible.

Definición 6.7 Sistema de ecuaciones lineales homogéneas
Se llama sistema de m ecuaciones homogéneas y n incógnitas, al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

es decir, cuando todos los términos independientes son nulos. Se llama sistema de m ecuaciones no homogéneas y n incógnitas, al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

siempre que al menos un término independiente sea diferente de cero.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es sobredeterminado si hay más ecuaciones que incógnitas. Se dice que un sistema de ecuaciones lineales está escasamente determinado si hay menos ecuaciones que incógnitas.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es no susceptible, si errores pequeños en los coeficientes o en el proceso de resolución sólo tienen un efecto pequeño sobre la solución. Y es susceptible, si errores pequeños en los coeficientes o en el proceso de resolución tienen un efecto grande sobre la solución.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es equivalente a un segundo sistema de ecuaciones lineales, si tienen los mismos conjuntos de soluciones.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice son equivalentes, si uno se obtiene del otro aplicando una sucesión finita de operaciones elementales.

Ejemplo 6.25 *Utilizando el método de operaciones elementales, solucionar el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y+4z=3 \\ 3x+2y-z=8 \end{cases}$$

Solución
Multiplicamos la ecuación 1 por 2 y luego le restamos la fila 2, multiplicamos la fila 1 por 3 y luego restamos la fila 3:

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ y-2z=1 \\ y-2z=1 \end{cases}$$

restamos la fila dos a la fila tres y a la fila uno le restamos la segunda fila:

$$\begin{cases} x+z=2 \\ y-2z=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

podemos observar que $0=0$, lo cual indica que el sistema es indeterminado, es decir tiene un número infinito de soluciones:

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}.$$

Ejemplo 6.26 *Utilizando el método de operaciones elementales, solucionar el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x-4y+6z=7 \\ 5x+2y-4z=5 \\ x+3y-5z=3 \end{cases}$$

Solución
Se multiplica la ecuación 1 por 5 y luego le restamos 3 veces la fila 2, y 3 veces la fila 3:

$$\begin{cases} 3x-4y+6z=7 \\ -13y+21z=10 \\ -13y+21z=-2 \end{cases}$$

restamos la fila dos a la fila tres:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6z = 7 \\ -13y + 21z = 10 \\ 0 = -12 \end{cases}$$

podemos observar que 0 $=$ -12, lo cual indica que el sistema es inconsistente.

Ejemplo 6.27 *Utilizando el método de operaciones elementales, solucionar el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ x + 3y + 6z + 10u = 0 \\ x + 4y + 10z + 20u = 0 \end{cases}$$

Solución
A la segunda fila le resto la primera fila, a la tercera fila le resto la primera fila, a la cuarta fila le resto la primera fila:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ y + 2z + 3u = 0 \\ 2y + 5z + 9u = 0 \\ 3y + 9z + 19u = 0 \end{cases}$$

A la tercera fila le resto 2 veces la segunda fila, a la cuarta fila le resto 3 veces la segunda fila:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ y + 2z + 3u = 0 \\ z + 3u = 0 \\ 3z + 10u = 0 \end{cases}$$

A la cuarta fila le resto 3 veces la tercera fila:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ y + 2z + 3u = 0 \\ z + 3u = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

Como el sistema se redujo a la forma triangular, entonces el sistema tiene solución única. Es decir $x = y = z = u = 0$.

6.6. Tarea

1. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 5x + 6y + 3z = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x - 5y + 6z = 3 \\ 8x - 7y - 3z = 9 \\ 7x - 8y + 9z = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y - 6z = 3 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y - 4z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ 5x - 3y + 2z = 3 \\ \ldots \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 3z = 4(1+y) \\ 2(z+2x) = 8 + y \\ 2y + 3x = 14 - z \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 5y + 2z = -3 \\ 2x + 8y - z = 1 \\ 3x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 5y - 2z = 4 \\ 3x + 5y - 7z = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 7x + 4y - 3z = 3 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 6x - 7y + 3z = 6 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - z = 1 \\ x - 7y + 3z = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 2 \\ x - 8y + 6z = 8 \\ x + 3y - z = 5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + 9y - 6z = 8 \\ x + 5y - 3z = 1 \\ 5x + y - z = 7 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 7x + 9y - z = 0 \\ 4x + 6y - 3z = 1 \\ x + 7y - 5z = 2 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 5x - 5y + 9z = 5 \\ 7x + 6y - z = 3 \\ 2x + 7y - 5z = 0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 7x - 9y + 9z = 0 \\ x - 12y + 5z = 5 \\ 3x - 7y + 6z = 6 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x + 5y - 9z = 9 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + 9y - 7z = 0 \\ x + 8y + 2z = 1 \\ 7x + 7y - 4z = 2 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 5x + 10y - z = 5 \\ x + 9y + 3z = 1 \\ 9x + 5y - z = 5 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 7x + 9y + z = 0 \\ x + 9y - 7z = 1 \\ 2x - 5y + 7z = 2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x + 9y - 7z = 8 \\ x - 7y + 9z = 1 \\ x + 8y - 2z = 7 \end{cases}$

t) $\begin{cases} 2x - 3y + 9z = 9 \\ 7x - 7y + 4z = 8 \\ 5x + 8y - 3z = 7 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 5x + 5y - 7z = 7 \\ 2x - 9y + 2z = 2 \\ 9x + 5y - 9z = 9 \end{cases}$

v) $\begin{cases} x + 9y - 7z = 7 \\ 3x + y - 9z = 3 \\ 5x - 7y + 9z = 5 \end{cases}$

w) $\begin{cases} 6x - 9y + 3z = 3 \\ 2x + 4y - 8z = 2 \\ 7x + 9y - 5z = 3 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x - 9y + 7z = 5 \\ x + 7y - 5x = 4 \\ x - 9y - 5z = 5 \end{cases}$

2. Determine de ser posible los valores de a, para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución única, tenga más de una solución, no tenga solución y encuentre la solución general del sistema en términos de a:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + az = 1 \\ ax - y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + 2ay + z = 2 \\ x + y - az = a \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + (a+1)z = 1 \\ x + (a+1)y + z = 1 \\ (a+1)x + y + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (a+1)x + y + z = 2a + 3 \\ (a-1)x - y - z = 1 \\ 2x - 4y - az = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - ay + az = -1 \\ ax + ay + z = 1 \\ ax - y + az = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + ay + z = -1 \\ ax - y + z = a \\ x + y - az = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - (a+1)y - z = 1 \\ ax + y - (a+1)z = 1 \\ x + y - z = a \end{cases}$

h) $\begin{cases} (a+1)x - y + az = -1 \\ x + y + z = a \\ 3x + 2y - az = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 3ay - z = 0 \\ x - 3y + z = a \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4x - 3y + az = a \\ 2x - 3y + 3z = 1 \\ x + y - az = a \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - (2a+1)y - z = 1 \\ (2a+1)x - y - z = 2 \\ x - y - (2a+1)z = 3 \end{cases}$

l) $\begin{cases} (2a-1)x + y + z = 1 \\ x + (2a-2)y + z = 1 \\ x + y + (2a-3)z = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + ay + 3z = 2 \\ x - y + az = 3 \\ 2x + y - z = a \end{cases}$

n) $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + a^2y + z = 0 \\ x + y + az = -1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} (a+1)x - y + z = 1 \\ (a-2)x + y + z = 1 \\ (a-3)x - y + z = 1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} ax+(a-2)y+z=1 \\ 2x-(a+1)y-z=1 \\ 3x+(a-1)y+z=1 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ ax+y-z=a \end{cases}$

r) $\begin{cases} 3ax-2y+3z=1 \\ x+2ay-3z=1 \\ x+y+3az=1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} (a+2)x+y+z=2 \\ x+(a+3)y+z+3 \\ x+y+(a+4)z=4 \end{cases}$

t) $\begin{cases} 0,2ax-0,1y+z=0,2 \\ 0,1x+0,3y+z=0,1 \\ 0,3x-0,4y-z=0,3 \end{cases}$

u) $\begin{cases} x+3ay-z=2 \\ 3ax-y+z=1 \\ x+y-3az=3 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2ax+2y-3z=-1 \\ x+3ay+z=1 \\ x+y+4z=-1 \end{cases}$

w) $\begin{cases} x+y-(a-3)z=1 \\ x-(a-3)y+z=1 \\ (a-3)x+y-z=1 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x+y-az=a^3-a^2 \\ x-y+z=a^2-a \\ x+y+az=a \end{cases}$

3. Determine de ser posible los valores de a y b, para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución única, tenga más de una solución, no tenga solución y encuentre la solución general del sistema en términos de a y b:

a) $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} bx-(a-1)y-z=1 \\ ax+y-(a+1)z=1 \\ x+y-z=a \end{cases}$

d) $\begin{cases} (2b-1)x+y+z=1 \\ x+(2b-1)y+z=b \\ x+y+(2b-1)z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax+y+z=b \\ x+ay+z=c \\ x+y+az=d \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-ay-z=b \\ bx-y+z=a \\ x-y+z=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+(b+1)z=1 \\ x+(a+1)y+z=b \\ (b+1)x+y+z=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} bx-3y+az=1 \\ ax-by+z=1 \\ bx+y+az=b \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-by+az=-1 \\ bx+ay+z=1 \\ ax-y+az=-b \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+3y-bz=0 \\ x-by+z=a \\ x+y-z=b \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2bx+2y-3z=-1 \\ x+3ay+z=b \\ x+by+4z=-1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} ax+(b-2)y+z=1 \\ bx-(a+1)y-z=1 \\ 3x+(b-1)y+z=1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+by+az=2 \\ bx+y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} bx-3y+bz=b \\ 2x-by+3z=1 \\ x+y-az=a \end{cases}$

o) $\begin{cases} (b+1)x-y+z=1 \\ (a+2)x+y-z=b \\ (b+3)x-y+z=1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} ax+y+z=b \\ x+by+z=3 \\ x+y+az=b \end{cases}$

q) $\begin{cases} bx+y-z=1 \\ x+a^2y+z=b \\ x+y+bz=-1 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 3ax-2y+3z=b \\ bx+2ay-3z=1 \\ x+y+3bz=1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x-(2a+1)y-z=1 \\ (2a+1)x-y-z=b \\ x-y-(2b+1)z=3 \end{cases}$

t) $\begin{cases} x+y-(a-3)z=b \\ x-(b-3)y+z=1 \\ (a-3)x+y-z=1 \end{cases}$

u) $\begin{cases} x+y+z=b \\ bx+y+z=-1 \\ ax+by-z=a \end{cases}$

v) $\begin{cases} x+3ay-az=2 \\ 3bx-y+z=b \\ x+y-3z=3 \end{cases}$

w) $\begin{cases} 0,2bx-0,1y+z=0,2 \\ 0,1x+0,3by+z=0,1 \\ 0,3x-0,4y-az=0,3 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x+y-z=b^3-b^2 \\ x-y+z=a^2-a \\ x+y+z=b \end{cases}$

4. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+y+z-u=2 \\ -x+y-z+2u=5 \\ 3x-y+z+2u=3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x+4y-z+2u=1 \\ x+5y-2z+3u=2 \\ -x+y-4z+5u=1 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x+10y-4z-u=2 \\ 5x+y-11z+u=3 \\ x+11y+12z-3u=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y-z+2u=1 \\ 3x-y+2z-u=2 \\ x-3y+z-4u=3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+5y+3z+u=5 \\ 4x-y+2z-u=1 \\ x+3y-5z+2u=2 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x+y-z-4u=1 \\ 2x+4y-z+4u=3 \\ x+3y-5z+2u=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+4y-3z-u=8 \\ 3x+2y-5z+2u=1 \\ x+5y+z+3u=2 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 4x+y-3z+2u=4 \\ x+5y+4z-u=5 \\ 2x-3y+z-3u=3 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} 2x-y+z-u=0 \\ x+2y-2z-u=2 \\ x+y-3z+2u=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+2z+3u=1 \\ x-5y+2z-3u=2 \\ 3x-4y+z-u=-5 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 5x+4y-z+3u=-1 \\ x-5y+4z-3u=1 \\ 5x+7y-z+5u=1 \end{cases}$ **l)** $\begin{cases} x+5y-5z+u=3 \\ x-3y+3z-u=0 \\ x+y+z-u=3 \end{cases}$

5. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+y-z+u=2 \\ x-y+3z-u=1 \\ x+y+2z+2u=-1 \\ 3x-y+z+u=1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 3x-y+2z+u=1 \\ x+3y-z+u=2 \\ x-y+3z-u=-1 \\ x+y-z+3u=1 \end{cases}$ **m)** $\begin{cases} -x+2y-z+3u=5 \\ x-2y+3z+2u=3 \\ 3x+y-2z+u=1 \\ x-y+3z-2u=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ x-y+z-u=2 \\ 2x+y-2z+u=1 \\ x+2y-z+2u=2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 5x+y-3z+u=2 \\ x-3y+2z-u=-2 \\ 3x+2y-z+2u=-1 \\ x+y-2z-u=1 \end{cases}$ **n)** $\begin{cases} x+3y+z+2u=1 \\ -x-2y-2z-2u=1 \\ x+2y+3z+u=2 \\ -x-3y-z-u=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+2z-u=0 \\ x+y-3z+3u=1 \\ 3x+y+3z-u=0 \\ x+y-z+3u=1 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} -2x-2y+3z+3u=1 \\ 2x+2y-z-2u=-1 \\ x-3y+2z-3u=1 \\ -x+3y-z+2u=-1 \end{cases}$ **o)** $\begin{cases} 5x-3y+z+2u=-1 \\ 4x+3y-2z-2u=-2 \\ 3x-2y+3z-3u=3 \\ 2x-y-z+4u=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+3y-z+u=0 \\ 3x+2y-5z+u=-1 \\ x-3y+2z-u=0 \\ x+y-2z+3u=1 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x+2y+3z-u=3 \\ 2x-3y+2z+u=-1 \\ x-2y-3z+u=2 \\ 2x+3y-z+2u=1 \end{cases}$ **p)** $\begin{cases} 3x-5y+7z-u=4 \\ x+7y-5z-3u=3 \\ 2x-7y+4z-u=2 \\ x-5y+4z-3u=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y-z+2u=0 \\ x+3y+z-u=1 \\ 3x+y-z+2u=0 \\ x-y+2z-u=1 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} 4x-3y+2z-u=1 \\ 5x+4y-3z+u=2 \\ x+4y-5z+2u=1 \\ 2x-y+2z-3u=2 \end{cases}$ **q)** $\begin{cases} x+7y-5z+3u=5 \\ 4x-y+3z-2u=2 \\ 5x+3y-z+4u=3 \\ x-6y+4z-u=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y-z+3u=3 \\ x-y+3z-u=2 \\ x+3y-z+u=-1 \\ 3x-y+z-u=1 \end{cases}$ **l)** $\begin{cases} 3x-y+3z-u=3 \\ 2x+3y-2z+u=1 \\ 3x+2y-z-3u=2 \\ 4x-3y+z+3u=4 \end{cases}$ **r)** $\begin{cases} 7x-12y+4z-3u=5 \\ 3x+7y-5z+4u=2 \\ 2x+5y-12z-u=3 \\ x+12y-15z+2u=-4 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 2x-4y-5z+6u=-1 \\ x+3y-3x+4u=1 \\ 3x-y+2z-3u=3 \\ x-4y+2z-5u=2 \end{cases}$ t) $\begin{cases} 4x-3y-z+5u=5 \\ x-10y+z-3u=2 \\ 4x+2y-5z+u=3 \\ x+5y-3z+2u=1 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3x-4y+5z-u=4 \\ x-5y+6z+2u=1 \\ 2x-4y+4z-u=3 \\ x+5y-5z+3u=2 \end{cases}$

6. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x+3y+7z-5u+v=5 \\ x+2y+4z+7u-2v=3 \\ 3x+2y+4z+7u-v=7 \\ 9x+6y+z-u+3v=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+3z-2u+4v=4 \\ 3x-6y+5z+2u=5 \\ x+2y+7z-3u-v=3 \\ 2x+4y+2z-5u+2v=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x+3y+2z+3u+4v=5 \\ 4x+2y+z+2u+3v=4 \\ 4x+2y+3z+2u+v=0 \\ 2x+y+7z+3u+2v=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x-3y+2z-2u+4v=5 \\ 2x+2y+2z+3u-3v=1 \\ 4x+2y-3z+2u-3v=2 \\ 2x+5y-5z+3u-3v=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x+9y+4z+2u-3v=2 \\ 2x-2y+z+u+4v=6 \\ 5x+6y+3z+2u-v=3 \\ 2x+3y+z+u+v=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-y-6z+3u+5v=1 \\ 7x-4y+2z-15u-3v=2 \\ x-2y-4z+9u-6v=5 \\ x-y+2z-6u+2v=7 \end{cases}$

6.7. Fracciones parciales

Definición 6.8 Fracción racional
La expresión $\dfrac{p(x)}{q(x)}$*, donde* $p(x)$ *y* $q(x)$ *son polinomios, con la particularidad de que* $q(x)$ *es un polinomio no nulo, lleva el nombre de fracción racional. El polinomio* $p(x)$ *se denomina numerador y* $q(x)$ *denominador de la fracción racional.*

Por lo visto, cada polinomio $t(x)$ es una fracción racional, en tal caso, $p(x)=t(x)$, $q(x)=1$.

Definición 6.9 Fracciones racionales iguales
Las fracciones racionales $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *y* $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ *se consideran iguales si* $p(x)s(x)=r(x)q(x)$*. De aquí sigue que dos fracciones racionales con iguales denominadores son iguales si y sólo si son iguales sus denominadores.*

La suma $\dfrac{p(x)}{q(x)}+\dfrac{r(x)}{s(x)}$ de las fracciones racionales $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ se denomina fracción racional $\dfrac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)}$ y su producto $\dfrac{p(x)}{q(x)}\cdot\dfrac{r(x)}{s(x)}$, la fracción racional $\dfrac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}$.

La diferencia y el cociente de dos fracciones racionales se determinan como el resultado de las operaciones inversas a la adición y multiplicación. Las operaciones de adición y multiplicación de fracciones racionales son conmutativas y asociativas; están ligadas entre sí mediante la ley distributiva.

Definición 6.10 fracción racional propia e impropia
La fracción racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *lleva el nombre de propia si el grado del polinomio* $p(x)$ *es menor que el de* $q(x)$*. Si el grado de* $p(x)$ *es mayor o igual que el de* $q(x)$*, la fracción racional se llama impropia.*

Toda fracción racional impropia $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede representarse de un modo único, en forma de una suma de un polinomio y cierta fracción racional propia.

La representación de una fracción impropia en esta forma, recibe el nombre de formación de la parte entera de una fracción racional impropia. Toda fracción racional propia puede ser descompuesta, en forma única, como la suma de un número finito de fracciones simples.

Todo polinomio $q(x)$ de coeficientes reales $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ se descompone de modo único en forma de un producto de su coeficiente principal a_n, de un número finito de polinomios de la forma $x - a$, correspondientes a sus raíces reales y de un número finito de polinomios de la forma $x^2 + px + q$, correspondientes a sus raíces no reales.

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una fracción racional propia. Supongamos que los coeficientes de los polinomios que la integran son números reales y la fracción dada es irreducible, esto significa que el numerador y el denominador no tienen raíces comunes. Entonces tenemos los siguientes casos:

1. Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ la fracción racional propia cuyo denominador tiene la forma

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente descomposición

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}$$

En esta expresión A_1, A_2, ..., A_n, son ciertos números constantes, algunos de los cuales pueden ser iguales a cero o iguales entre sí.

2. Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ la fracción racional propia cuyo denominador tiene la forma

$$q(x) = (x - a_1)^n (x - a_2)^m ... (x - a_r)^k$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente descomposición

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + ... + \frac{A_n}{(x - a_1)^n} + \frac{B_1}{x - a_2} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + ... +$$

$$+ \frac{B_n}{(x - a_2)^m} + \frac{C_1}{x - a_r} + \frac{C_2}{(x - a_r)^2} + ... + \frac{C_k}{(x - a_r)^k}$$

En esta expresión A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m, ..., C_1, C_2, ..., C_k son ciertos números constantes, algunos de los cuales pueden ser iguales a cero o iguales entre sí.

3. Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ la fracción racional propia cuyo denominador tiene la forma

$$q(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)...(x^2 + a_nx + b_n)$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente descomposición

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + a_2x + b_2} + ... + \frac{A_nx + B_n}{x^2 + a_nx + b_n}$$

En esta expresión A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n son ciertos números constantes, algunos de los cuales pueden ser iguales a cero o iguales entre sí.

4. Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ la fracción racional propia cuyo denominador tiene la forma

$$q(x) = (x^2 + a_1x + b_1)^m(x^2 + a_2x + b_2)^r...(x^2 + a_nx + b_n)^k$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente descomposición

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + a_1x + b_1)^2} + ... + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + a_1x + b_1)^m} +$$

$$+ \frac{C_1x + D_1}{x^2 + a_2x + b_2} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + a_2x + b_2)^2} + ... + \frac{C_rx + D_r}{(x^2 + a_2x + b_2)^r} +$$

$$\frac{E_1x + F_1}{x^2 + a_nx + b_n} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2 + a_nx + b_n)^2} + ... + \frac{E_kx + F_k}{(x^2 + a_nx + b_n)^k}$$

En esta expresión A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m, C_1, C_2, ..., C_r, D_1, D_2, ..., D_r, ..., E_1, E_2, ..., E_k, F_1, F_2, ..., F_k son ciertos números constantes, algunos de los cuales pueden ser iguales a cero o iguales entre sí.

Ejemplo 6.28 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{x^6 - x^2 + 1}{(x-1)^3}.$$

Solución
Dividiendo esta expresión, obtenemos

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 10 + \frac{14x^2 - 24x + 11}{(x-3)^3}$$

Analizaremos la fracción

$$\frac{14x^2 - 24x + 11}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$14x^2 - 24x + 11 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2: \ A = 14 \\ x^1: \ -2A + B = -24 \\ x^0: \ A - B + C = 11 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A = 14$, $B = 4$, $C = 1$. De donde

$$\frac{14x^2 - 24x + 11}{(x-3)^3} = \frac{14}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

Por lo tanto la fracción racional queda descompuesta por:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 10 + \frac{14x^2 - 24x + 11}{(x-3)^3} = \frac{14}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Ejemplo 6.29 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 8x + 8}{x^3 + 1}$$

Solución
Dividiendo esta expresión, obtenemos

$$x^3 - 7x + 7 - \frac{x-1}{x^3+1}$$

Analizaremos la fracción

$$\frac{x-1}{x^3+1} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$x - 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2: \; A + B = 0 \\ x^1: \; -A + B + C = 1 \\ x^0: \; A + C = -1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$. De donde

$$-\frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2-x+1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1-2x}{x^2-x+1}\right)$$

Por lo tanto la fracción racional queda descompuesta por:

$$x^3 - 7x + 7 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1-2x}{x^2-x+1}\right).$$

Ejemplo 6.30 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{x+1}{(x+1)^4 - 16}$$

Solución
Analizaremos la fracción

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$x + 1 = A(x+3)(x^2+2x+5) + B(x-1)(x^2+2x+5) + (Cx+D)(x-1)(x+3)$$

$$\begin{cases} x^3: \ A+B+C=0 \\ x^2: \ 5A+B+2C+D=0 \\ x^1: \ 11A+3B-3C+2D=1 \\ x^0: \ 15A-5B-3C=1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A=\frac{1}{16}$, $B=\frac{1}{16}$, $C=-\frac{1}{8}$, $D=-\frac{1}{8}$. De donde

$$\frac{\frac{1}{16}}{x-1}+\frac{\frac{1}{16}}{x+3}+\frac{-\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}}{x^2+2x+5}=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right).$$

Ejemplo 6.31 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{1}{x^4+1}$$

Solución
Analizaremos la fracción

$$\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)$$

$$\begin{cases} x^3: \ A+C=0 \\ x^2: \ -\sqrt{2}\,A+B+\sqrt{2}\,C+D=0 \\ x^1: \ A-\sqrt{2}\,B+C+\sqrt{2}\,D=0 \\ x^0: \ B+D=1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$. De donde

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}\,x+2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}-\frac{\sqrt{2}\,x-2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right).$$

Ejemplo 6.32 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{8x^2}{x^4-1}$$

Solución
Analizaremos la fracción

$$\frac{8x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$8x^2=A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$$

$$\begin{cases} x^3: \ A+B+C=0 \\ x^2: \ -A+B+D=8 \\ x^1: \ A+B-C=0 \\ x^0: \ -A+B-D=0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A = -2$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 4$. De donde

$$\frac{8x^2}{x^4-1} = -\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x^2+1}.$$

Ejemplo 6.33 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{x^3}{x^4+18x^2+81}$$

Solución
Analizaremos la fracción

$$\frac{x^3}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$x^3 = (Ax+B)(x^2+9) + (Cx+D) \quad \Rightarrow \begin{cases} x^3: \ A = 1 \\ x^2: \ B = 0 \\ x^1: \ 9A + C = 0 \\ x^0: \ 9B + D = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A = 1$, $B = 0$, $C = -9$, $D = 0$. De donde

$$\frac{x^3}{x^4+18x^2+81} = \frac{x}{x^2+9} - \frac{9x}{(x^2+9)^2}.$$

Ejemplo 6.34 *Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:*

$$\frac{1}{x^6+2x^3+1}$$

Solución
Analizaremos la fracción

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

Eliminamos denominadores y establecemos un sistema de ecuaciones:

$$1 = A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2 + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x+1)^2$$

$$\begin{cases} x^5: \ A + C = 0 \\ x^4: \ -A + B + C + D = 0 \\ x^3: \ A - 2B + D + E = 0 \\ x^2: \ A + 3B + C + 2E + F = 0 \\ x^1: \ -A - 2B + C + D + E + 2F = 0 \\ x^0: \ A + B + D + F = 1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{2}{9}$, $D = \frac{1}{3}$, $E = -\frac{1}{3}$, $F = \frac{1}{3}$. De donde

$$\frac{1}{x^6+2x^3+1} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{3x-3}{(x^2-x+1)^2}\right)$$

6.8. Tarea

1. Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:

a) $\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2-x-2}$;

b) $\dfrac{3x^2+3x+1}{2x^3+11x^2+4x-5}$;

c) $\dfrac{x^2+3x+6}{4x^3+8x^2-9x-18}$;

d) $\dfrac{2x^3+3x+3}{3x^3+20x^2+29x-12}$;

e) $\dfrac{5x^3-4x^2+x-3}{24x^3-34x^2-5x+3}$;

f) $\dfrac{x^3-4}{50x^3+175x^2-2x-7}$;

g) $\dfrac{x^4-5x^2+2x-5}{12x^3+41x^2+13x-6}$;

h) $\dfrac{2x^4-2x^2-3x-1}{6x^3+25x^2+31x+10}$;

i) $\dfrac{3x^5-5x^2+2x+5}{x^3+2x^2-33x-90}$;

j) $\dfrac{3x^5-5x^2+2x+5}{x^3+2x^2-33x-90}$;

k) $\dfrac{x^5-5x^4+x3-2}{6x^3+5x^2-7x-4}$;

l) $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$;

m) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$;

n) $\dfrac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$;

o) $\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}$;

p) $\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$;

q) $\dfrac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}$;

r) $\dfrac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}$;

s) $\dfrac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}$;

t) $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$;

u) $\dfrac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}$;

v) $\dfrac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

w) $\dfrac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$;

x) $\dfrac{x^5+3x^2-1}{(x^2+1)(x^5-1)}$;

y) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$.

2. Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:

a) $\dfrac{6}{x^3-1}$;

b) $\dfrac{x^5-x}{x^8+1}$;

c) $\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$;

d) $\dfrac{x^2-x}{(x+1)^4}$;

e) $\dfrac{x^2+x}{x^6+1}$;

f) $\dfrac{3}{x^2-x^5}$;

g) $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$;

h) $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$;

i) $\dfrac{x^5-3x}{x^2(x^5-1)}$;

j) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.

3. Descomponga la fracción racional en fracciones elementales:

a) $\dfrac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}$;

b) $\dfrac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}$;

c) $\dfrac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}$;

d) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}$;

e) $\dfrac{5x^2+3x-1}{(x^2+5)(x^4+1)}$;

f) $\dfrac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}$;

g) $\dfrac{x^6+5x^5+3x^4+3x-1}{x(2x-1)^2(2x^2-x+3)^2}$;

h) $\dfrac{x^5-x^4+4x^2+8x}{(x^2+2)^3}$;

i) $\dfrac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$;

j) $\dfrac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;

k) $\dfrac{x^2+5x+1}{6x^3+19x^2+2x-3}$;

l) $\dfrac{2x^4-3x^2+2x+5}{10x^3+19x^2-9}$;

m) $\dfrac{x^6+x^5-3x^4+2x^3-1}{(x-3)^2(x^2+2x+5)^2}$;

n) $\dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{6x^3+17x^2-59x+30}$.

6.9. Ecuaciones cuadráticas

La ecuación cuyo primer miembro es un polinomio de segundo grado, con respecto a la incógnita x, y el segundo miembro es igual a cero, se denomina cuadrática. La forma general de la ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado es $Ax^2+Bx+C=0$. Los números A y B son los coeficientes del término principal y de la incógnita de primer grado, respectivamente y C, el término independiente.

El número x, que hace igual a cero el trinomio cuadrado Ax^2+Bx+C, se denomina raíz de la ecuación cuadrática $Ax^2+Bx+C=0$.

Si en la ecuación cuadrática de la forma general $Ax^2+Bx+C=0$ uno de los dos coeficientes, B o C, es igual a cero, o ambos a la vez son iguales a cero, la ecuación cuadrática se denomina incompleta. Son posibles tres formas de ecuaciones cuadráticas incompletas:

1) $Ax^2+Bx=0$ ($C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$): Esta ecuación se resuelve descomponiendo el primer miembro en factores, $x(Ax+B)=0$. El producto se anula cuando uno de los factores es igual a cero; por eso, o bien $x=0$, o bien $Ax^2+Bx=0$, de donde $x=-\frac{B}{A}$. De este modo, la ecuación $Ax^2+Bx=0$ tiene dos raíces; $x_1=0$, $x_2=-\frac{B}{A}$.

Ejemplo 6.35 *Determine las raíces de la siguiente ecuación cuadrática*

$$3x^2+4x=0.$$

Solución
Esta ecuación la resolvemos de la siguiente manera:

$$3x^2+4x=0 \;\Rightarrow\; x(3x+4)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ 3x+4=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

2) $Ax^2+C=0$ ($B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$): La ecuación $Ax^2+C=0$, después de dividir los términos por A y pasar el término independiente al segundo miembro, la reducimos a la forma $x^2=-\frac{C}{A}$, de donde $x=\pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$. Si los coeficientes A y C tienen signos contrarios, tendremos que $\frac{c}{A}<0$, y por eso la incógnita x tiene dos valores reales de signos contrarios

$$\begin{cases} x_1=-\sqrt{-\frac{C}{A}} \\ x_2=\sqrt{-\frac{C}{A}} \end{cases}$$

Ejemplo 6.36 *Determine las raíces de la siguiente ecuación cuadrática*

$$5x^2+2=0.$$

Solución
Esta ecuación la resolvemos de la siguiente manera:

$$5x^2-2=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{2}{5} \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

3) $Ax^2=0$ ($A\neq 0$, $B=C=0$): La ecuación $Ax^2=0$, puesto que $A\neq 0$, $x^2=0$, $x=0$. Se dice que el número 0 es raíz doble de la ecuación $Ax^2=0$, es decir, $x_1=x_2=0$.

Ejemplo 6.37 *Determine las raíces de la siguiente ecuación cuadrática*

$$2x^2=0.$$

Solución
Esta ecuación la resolvemos de la siguiente manera:

$$2x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0.$$

La ecuación cuadrática, cuyo primer coeficiente es igual a 1, es decir, la ecuación de la forma $x^2+Px+Q=0$, se llama reducida.

Transformando el primer miembro de la ecuación cuadrática reducida

$$x^2+2\cdot\frac{P}{2}x+\left(\frac{P}{2}\right)^2-\left(\frac{P}{2}\right)^2+Q=0.$$

En el primer miembro de esta ecuación se introdujeron como sumandos dos números contrarios $\left(\frac{P}{2}\right)^2$ y $-\left(\frac{P}{2}\right)^2$, lo que, desde luego, no varía la magnitud del primer miembro. Después de pasar los últimos dos sumandos al segundo miembro, tendremos

$$x^2+2\cdot\frac{P}{2}x+\left(\frac{P}{2}\right)^2=\left(\frac{P}{2}\right)^2-Q \quad\Rightarrow\quad \left(x+\frac{P}{2}\right)^2=\frac{P^2}{4}-Q.$$

Extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros, considerando que $\left(\frac{P}{2}\right)^2-Q\geq 0$ en tal caso

$$x+\frac{P}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2-Q} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=-\frac{P}{2}+\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2-Q} \\ x_2=-\frac{P}{2}-\sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2-Q} \end{cases}.$$

Esta es precisamente la fórmula con la cual se calculan las raíces de la ecuación cuadrática reducida, lo cual se puede expresar como: Las raíces de la ecuación cuadrática reducida son iguales a la mitad del segundo coeficiente, con signo contrario, más - menos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad menos el término independiente.

Ejemplo 6.38 *Determine las raíces de la siguiente ecuación cuadrática*

$$x^2+4x-5=0.$$

Solución
Esta ecuación la resolvemos de la siguiente manera:

$$x^2+4x-5=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=-\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-(-5)} \\ x_2=-\frac{4}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-(-5)} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-5 \end{cases}.$$

Si se necesita hallar las raíces de la ecuación cuadrática de la forma general $Ax^2+Bx+C=0$, después de dividir todos los términos por A $(A\neq 0)$ ella se convierte en reducida

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0.$$

En tal caso

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \\ x_2=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \end{cases}$$

Esto se puede expresar como: Las raíces de la ecuación cuadrática de la forma general son iguales a una fracción cuyo denominador es el doble del primer coeficiente y el numerador es igual al segundo coeficiente, con signo contrario, más - menos la raíz cuadrada del cuadrado de este coeficiente menos el cuádruplo del producto del primer coeficiente por el término independiente.

Ejemplo 6.39 *Determine las raíces de la siguiente ecuación cuadrática*

$$2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Solución
Esta ecuación la resolvemos de la siguiente manera:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} \\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}.$$

Entre las raíces de la ecuación cuadrática y sus coeficientes existe una dependen-cia expresada en las siguientes propiedades:

1. La suma de las raíces de la ecuación cuadrática reducida es igual al segundo coeficiente con signo contrario, y el producto de las raíces es igual al término independiente.

2. Si la suma de dos números desconocidos es igual a P y su producto es igual a Q, los números buscados son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - Px + Q = 0$.

3. Para la ecuación cuadrática de la forma general $Ax^2 + Bx + C = 0$, después de reducirla a la forma $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$, tendremos $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$.

Utilizando las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática, todo trinomio de raíces reales se puede descomponer en factores:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) \\ &= A[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ &= (x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)] \\ &= x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] \\ &= A(x - x - 1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Al resolver una ecuación cuadrática de coeficientes numéricos en ciertos casos se obtienen dos raíces reales, diferentes entre sí; en otros casos, dos raíces reales iguales, y en los demás, dos raíces imaginarias.

En este análisis tiene especial importancia la expresión $\Delta = B^2 - 4AC$, llamado discriminante de la ecuación se segundo grado. Son posibles tres casos:
CASO 1. $A > 0$, $\Delta > 0$:
Si el discriminante es un número positivo, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y distintas, puesto que la expresión $\pm\sqrt{B^2 - 4AC}$ representa en sí dos números contrarios, más aún, ninguno de ellos es igual a cero; por lo tanto, las fracciones

$$\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \text{ y } \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$$

tienen diferentes numeradores para denominadores iguales. Con respecto a los signos de los coeficientes B y C se pueden efectuar las cuatro suposiciones siguientes:

1. $B < 0$, $C > 0$: Si el término independiente es positivo, ambas raíces son de signo igual, puesto que $x_1x_2 = \frac{C}{A} > 0$. La suma de las raíces $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} > 0$, y, por eso, ambas raíces son positivas.

2. $B > 0$, $C > 0$: Ambas raíces son negativas y de igual signo, puesto que el signo de la suma de las raíces es contrario al signo del coeficiente $\frac{B}{A} > 0$.

3. $B < 0$, $C < 0$: Las raíces son de signo contrario, dado que el producto es negativo, $x_1 x_2 = \frac{C}{A} < 0$. La raíz mayor en valor absoluto es positiva, ya que $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} > 0$.

4. $B > 0$, $C < 0$: Las raíces son de signo contrario. La raíz mayor en valor absoluto es negativa.

Ejemplo 6.40 *Determine las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:*
a) $2x^2 - 5x + 1 = 0$; **b)** $3x^2 + 2x + 4 = 0$; **c)** $4x^2 - 3x - 2 = 0$; **d)** $5x^2 + 2x - 3 = 0$.
Solución
Estas ecuaciones las resolvemos de la siguiente manera:

a) $$2x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \\ x_2 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

b) $$3x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \\ x_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{-11}}{3} \\ x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{-11}}{3} \end{cases}$$

c) $$4x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} \\ x_2 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{41}}{8} \\ x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{41}}{8} \end{cases}$$

d) $$5x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} \\ x_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{5} \\ x_2 = -1 \end{cases}.$$

CASO 2. $A > 0$, $\Delta = 0$:
Ambas raíces son reales e iguales, $x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A}$, como se desprende de la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática. Si $B > 0$, ambas raíces son negativas; para $B < 0$, ambas raíces son positivas.

CASO 3. $A > 0$, $\Delta < 0$:
La ecuación cuadrática no tiene raíces reales, puesto que la raíz cuadrada del número negativo $\sqrt{\Delta}$ es un número imaginario.

Los resultados del análisis están expuestos geométricamente en las gráficas del trinomio cuadrado. En el caso 1 la parábola corta el eje de abscisas en dos puntos x_1 y x_2 (x_1 y x_2 son raíces del trinomio y al mismo tiempo raíces de la ecuación cuadrática).
En el caso 2, la parábola es tangente al eje de abscisas (las dos raíces se confunden en una).
En el caso 3, la parábola no corta al eje 0X (las raíces imaginarias)

Ejemplo 6.41 *Determine para qué valores reales del parámetro k las raíces de la ecuación*

$$(k-3)x^2 - 2kx + 6k = 0$$

son reales. ¿Bajo qué condiciones las raíces serán positivas?
Solución

1) Si $k \neq 3$, la ecuación es de segundo grado. Las raíces serán reales si $\Delta \geq 0$, es decir

$$(-2k)^2 - 4(k-3)6k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4k(18-5k) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq \frac{18}{5}$$

luego $k \in \left[0; \frac{18}{5}\right] \setminus 3$.
2) Supongamos que $k = 3$, entonces tenemos la ecuación lineal

$$-6x + 18 = 0$$

de donde obtenemos $x = 3 \in \mathrm{R}$.
Así, hemos determinado que las raíces de la ecuación serán reales si $k \in \left[0; \frac{18}{5}\right]$.
Si x_1 y x_2 son las raíces reales de la ecuación, se tiene que

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \quad \wedge \quad x_1 x_2 = \frac{C}{A}$$

Luego las raíces serán positivas si

$$x_1 + x_2 > 0 \quad \wedge \quad x_1 x_2 > 0$$

Si $k = 3$ entonces $x = 3 > 0$
Si $k \neq 3$, entonces las raíces serán positivas si

$$\frac{2k}{k-3} > 0 \quad \wedge \quad \frac{6k}{k-3} > 0$$

con $k \in \left[0; \frac{18}{5}\right] \setminus 3$. Resolviendo las inecuaciones, obtenemos $k \in \left(3; \frac{18}{5}\right]$. En consecuencia las raíces serán reales y positivas si $k \in \left(3; \frac{18}{5}\right]$.

Ejemplo 6.42 *Una parcela de tierra de 520 m^2 tiene forma rectangular, uno de sus lados constituye el 65 % del otro. Hallar estos lados.*
Solución
Sabemos que el área del rectángulo está dado por $A = xy$. Como $y = 0,65x$, entonces $520 = 0,65x^2$ despejando x, obtenemos

$$x = \sqrt{\frac{520}{0,65}} \quad \Rightarrow \quad x = 20\sqrt{2}$$

Remplazamos x para obtener y

$$y = 0,65\left(20\sqrt{2}\right) = 13\sqrt{2}.$$

Ejemplo 6.43 *Una caja sin tapa de 24 centímetros cúbicos de capacidad, se hace de una pieza cuadrada de cartón cortando cuadrados de 2 centímetros de lado en cada esquina y doblando los lados. Hallar las dimensiones de la pieza de cartón que se necesita.*
Solución
Sea x la dimensión pedida. La caja tendrá por dimensiones $(x-4)$ por $(x-4)$ por 2 y su volumen será $2(x-4)(x-4)$. Así, pues

$$2(x-4)^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \pm 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{3} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Entonces, el cuadrado de cartón necesario tiene $4 + 2\sqrt{3}$ centímetros de lado.

Ejemplo 6.44 *Por dos tubos juntos se puede llenar un depósito en 6 horas 40 minutos. Hallar el tiempo que cada uno solo emplearía para llenar el depósito si uno de los tubos puede llenarlo en 3 horas menos que el otro.*

Solución

Sea x, el tiempo en horas que necesita el tubo menor, $x-3$ es el tiempo que necesita el mas grande. Entonces $\frac{1}{x}$, es la parte que llena en una hora el tubo menor, $\frac{1}{x-3}$, parte que llena en una hora el tubo mayor. Como los dos tubos juntos llenan el depósito en $\frac{3}{20}$ del deposito en una hora.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad 20(x-3)+20x=3x(x-3)$$

$$3x^2-49x+60=(3x-4)(x-15)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=\frac{4}{3} \\ x_2=15 \end{cases} .$$

El tubo menor llenara el depósito en 15 horas y el mayor en 12 horas.

Ejemplo 6.45 *Si se lanza hacia arriba un objeto con velocidad inicial v metros por segundo, su altura s metros sobre el suelo después de t segundos viene dada por $s=vt-\frac{1}{2}gt^2$. Con $g=9,80$ metros por segundos y velocidad inicial 120 metros por segundo, hallar:*

a) *Cuándo está el objeto a 60 metros sobre el suelo.*

b) *En qué momento alcanza su mayor altura y cuál es ésta.*

Solución

La ecuación del movimiento es $s=120t-4,9t^2$.

a) Si $s=60$, entonces

$$60=120t-4,9t^2 \Rightarrow 4,9t^2-120t+60=0 \Rightarrow t=\frac{120\pm 115}{9,8} \Rightarrow \begin{cases} t_1=24 \\ t_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Al cabo de $t=0,5$ segundos, el objeto está a 60 metros sobre el suelo y sigue subiendo. Después de $t=24$ segundos el objeto está a 60 metros sobre el suelo y va cayendo.

b) El objeto está a su máxima altura cuando

$$t=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-120)}{2(4,9)}=12,24 \text{ segundos}$$

Su altura está dada por

$$120t-4,9t^2=120(12,24)-4,9(12,24)^2=734,9\text{metros}.$$

Ejemplo 6.46 *Dos personas salen simultáneamente de dos ciudades A y B y van una en dirección de la otra. La primera persona camina 2 km/hr más de prisa que la segunda y llega a B una hora antes que la segunda llegue a A. Si A y B distan 24 km. ¿Cuántos kilómetros recorre cada una de las personas en una hora?*

Solución

Sea v km/hr la velocidad de la primera persona P_A, entonces la velocidad de la segunda persona P_B será de $(v-2)$ km/hr. La persona P_A tardará $t_1=\frac{24}{v}$ horas y P_B tardará $t_2=\frac{24}{v-2}$ horas. Como P_B llega una hora más tarde que P_A, entonces

$$t_2=t_1+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{24}{v-2}-\frac{24}{v}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2-2v-48}{v(v-2)}=0 \quad \Rightarrow \quad v=8 \quad \vee \quad v=-6$$

Pero $v>0$, así, $v=8$ km/hr. Luego la distancia que recorre P_A en una hora es de $d_1=v\cdot 1=8$ km y P_B recorre $d_2=(v-2)\cdot 1=6$ km.

Ejemplo 6.47 *Un tren rápido fue obligado a detenerse 16 minutos en un disco rojo. Para recuperar este tiempo, viajó en un tramo de 80 kilómetros, 10 km/hr más rápido que lo normal. ¿Cuál es la velocidad normal del tren?*

Solución

Sea v km/hr la velocidad prevista por el tren (donde $v > 0$). La velocidad real fue de $(v + 10)$ km/hr.

El tiempo previsto era de $t_1 = \frac{80}{v}$ hr, pero realmente $t_2 = \frac{80}{v+10}$ hr. Por hipótesis tenemos que

$$t_1 - t_2 = \frac{16}{60}$$

es decir

$$\frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{16}{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2 + 10v - 3000}{v(v+10)} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 50 \quad \vee \quad v = -60$$

pero $v > 0$ luego $v = 50$ y la velocidad normal del tren fue de 50 km/hr.

6.10. Tarea

1. Formar la ecuación cuadrática si sus raíces son:

a) $m+n,\ m-n;$
b) $m+\sqrt{n},\ m-\sqrt{n};$
c) $1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5};$
d) $2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5};$
e) $2-3\sqrt{2},\ 2+3\sqrt{2};$
f) $1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3};$
g) $5-2\sqrt{5},\ 5+2\sqrt{5};$
h) $2m-\sqrt{3},\ 2m+\sqrt{3};$
i) $1-3m\sqrt{2},\ 1+3m\sqrt{2};$
j) $\frac{1}{m}-\sqrt{2},\ \frac{1}{m}+\sqrt{2};$
k) $3-\frac{\sqrt{3}}{m},\ 3+\frac{\sqrt{3}}{m};$
l) $\frac{2}{n}+\frac{\sqrt{2}}{n},\ \frac{2}{n}+\frac{\sqrt{2}}{n};$
m) $\frac{n}{m}+\frac{n\sqrt{2}}{m},\ \frac{n}{m}-\frac{n\sqrt{2}}{m};$
n) $\frac{n}{3}-\sqrt{3},\ \frac{n}{3}+\sqrt{3};$
o) $\frac{5n}{2m}+\frac{n\sqrt{5}}{m},\ \frac{5n}{2m}-\frac{n\sqrt{5}}{m}.$

2. ¿Para qué valores del coeficiente M cada una de las ecuaciones tiene dos raíces iguales:
a) $4x^2+Mx+9=0;$ **b)** $x^2-2(1+3M)x+7(3+2M)=0;$ **c)** $Mx^2+4x+1=0.$

3. ¿Qué valor tiene M si la ecuación
a) $4x^2+Mx+9=0$ tiene una raíz igual a $A-B$;
b) $x^2+Mx-18=0$ tiene una raíz igual a -3;
c) $Mx^2-15x-7=0$ tiene una raíz igual a -7;
d) $x^2+Mx+A^2+5A+6=0$ tiene una raíz igual a$A+3$?.

4. Si las raíces de la ecuación $Mx^2+3x-M+1=0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro M para que:
a) $x_1-2x_2=\frac{1}{2};$ **b)** $2x_1+3x_2=-2;$ **c)** $x_1^2-x_2^2=3.$

5. Si las raíces de la ecuación $3x^2+(M-3)x+2M=0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro M para que:
a) $2x_1-2x_2=5;$ **b)** $x_1+5x_2=-3;$ **c)** $x_2^2+x_2^2=2.$

6. Si las raíces de la ecuación $(M^2 - 2M + 2)x^2 - 2x + 3 = 0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro M para que:
a) $x_1^2 - 4x_2^2 = 1$; **b)** $9x_1^2 + x_2^2 = 3$; **c)** $x_1^3 - x_2^3 = 1$.

7. Si las raíces de la ecuación $(M + 2)x^2 - Mx + 4 = 0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro M para que:
a) $x_1^3 + 8x_2^3 = 1$; **b)** $x_1^2 - 4x_2^2 = 4$; **c)** $x_1^3 - x_2^3 = 8$.

8. Si las raíces de la ecuación $(M - 1)x^2 + 3x + M - 1 = 0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro M para que:
a) $8x_1^3 - x_2^3 = 1$; **b)** $x_1^4 - x_2^4 = 1$; **c)** $x_2^2 - x_2^2 = 4$.

9. Si las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + M = 0$ las designamos por x_1 y x_2, ¿qué valores hay que dar al parámetro M para que:
a) $x_1 - x_2 = 6$; **b)** $3x_1 - x_2 = 4$; **c)** $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{5}$; **d)** $x_1^2 + x_2^2 = 34$.

10. ¿Para qué valores del término independiente las raíces de la ecuación $3x^2 + 2x - A = 0$ son entre sí como $2 : 3$?

11. Formar la ecuación cuadrática, cuyas raíces son iguales a $(x_1 + x_2)^2$ y $(x_1 - x_2)^2$, donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$.

12. Conocida la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, formar una nueva ecuación de segundo grado cuyas raíces sean inversas a las raíces de dicha ecuación.

13. Dada la ecuación $4x^2 + Mx + 50 = 0$. ¿Para qué valores de M la relación de las raíces es $\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{2}$?

14. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $2x(x + 6) = x^2 - 3x$;
b) $x + 2x(x - 1) = 5$;
c) $x^2 - 7x + 6 = 0$;
d) $3x^2 - 7x - 1 = 0$;
e) $(x + 2)^2 = 2(x + 2) + 3 = 0$;
f) $x(x - 3) - 2x(\sqrt{2}\,x - 3) = 0$;
g) $x^2 + 4x - 8\sqrt{8}\,x + 20 = 0$;
h) $(x + 1)(x - 3) - 2(x + \sqrt{7}) = 0$;
i) $(x - 1)(x - 5) - 3(x + 2) = 0$;
j) $7(x^2 + 5x + 8) = 3(x + 1)(x - 2) = 0$;
k) $\dfrac{x - 5}{2} + \dfrac{2x - 1}{2 + 3x} = \dfrac{5x - 1}{10} - 1\dfrac{2}{5}$;
l) $\dfrac{6x - 5}{4x - 3} = \dfrac{3x + 3}{2x + 5}$;
m) $\dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{2x}{x + 1} = 1$;
n) $\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{1}{x}$;
o) $\dfrac{x - 1}{x + 1} + \dfrac{x - 3}{x + 3} = 1$;
p) $\dfrac{1}{x^2 - 25} - \dfrac{1}{x + 5} = \dfrac{1}{5}$;
q) $1 - \dfrac{2}{2x^2 - x} = \dfrac{3}{(2x^2 - x)^2}$;
r) $\sqrt{5x - 3} + \sqrt{4x + 3} = 2$;
s) $\sqrt{x - 8} + \sqrt{3x - 2} = 2$;
t) $3x^2 - 5x + \sqrt{3x^2 - 5x + 4} = 16$.

15. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1;$

b) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1;$

c) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2;$

d) $\sqrt{1-4x+4x^2}+\sqrt{1+4x+4x^2}=2;$

e) $\sqrt{||x|-4|+\frac{1}{4}}+\sqrt{|4-|x||+\frac{17}{4}}=4.$

16. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $|x^2-3x+3|=2;$

b) $|2x-x^2+3|=2x;$

c) $|x^2+x-1|=2x-1;$

d) $|x^2-x-3|=-x-1;$

e) $2|x^2+2x-5|=x-1;$

f) $x^2+3|x|+2=0;$

g) $|x^2-1|+x+1=0;$

h) $|x^2-9|+|x-2|=5;$

i) $(x+1)^2-2|x+1|+1=0;$

j) $|x^2-4|-|9-x^2|=5;$

k) $|x^2-9|+|x^2-4|=5.$

17. Dos turistas se dirigen simultáneamente a una ciudad que se encuentra a la distancia de 50 km de ellos. El primero de ellos hace por hora 1.5 km más, debido a lo cual llega a la ciudad una hora antes. ¿Cuántos kilómetros por hora hace cada turista?

18. La distancia entre dos ciudades por río es de 100 km. Un barco pasa esta distancia dos veces (hacia arriba y hacia abajo) en 9 horas 30 min. Determinar la velocidad del barco en agua muerta o estancada, si la velocidad de la corriente es de 4 km/hora.

19. Se va a bordear un cuadro de flores rectangular de un jardín que tiene 16 x 24 metros, con una faja de anchura uniforme que doble su área. Hallar la anchura x de la faja.

20. Dos obreros trabajando juntos pueden cumplir una tarea dada en 20 horas. El primero de ellos por separado puede realizar el mismo trabajo 10 horas más rápidamente que el segundo. ¿En cuántas horas cada obrero por separado puede realizar la tarea?

21. Si la longitud y anchura de un rectángulo, de 2 por 4 centímetros, aumenta en la misma cantidad, el área del nuevo rectángulo medirá el doble de la original. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo, expresadas hasta centésimos?

22. Una piscina se llena por intermedio de dos tubos en 1,5 horas; el primer tubo por separado puede llenar la piscina dos horas antes que el segundo tubo solo. ¿En cuántas horas cada uno de los tubos por separado puede llenar la piscina?

23. Un agricultor estableció que con la existencia de una reserva de semillas de 22,5 toneladas se puede plantar toda la parcela destinada a la papa. Durante la plantación se supo que las semillas eran selectas y por eso se puede disminuir la norma de plantación propuesta, aproximadamente, 200 kg por hectárea. Esto condujo al aumento de la superficie de siembra en 1 hectárea. ¿Cuál ha sido la norma de siembra de papa proyectada por hectárea y cuál es la superficie de la parcela inicial?

24. La distancia entre dos estaciones ferroviarias es de 100 km. El tren rápido recorre este camino 45 minutos más rápidamente que el tren de pasajeros ordinario. Hallar la velocidad de cada tren, si se sabe que la diferencia entre sus velocidades es de 20 km/hora.

25. El interior de una caja cúbica se tapiza de material aislante de $\frac{1}{2}$ centímetro de espesor. Hallar la primitiva dimensión interna sabiendo que el volumen ha bajado en 271 centímetros cúbicos.

26. Un turista salió de A a B y hace un promedio de 8 km/hora. Cuando éste recorrió 27 km, desde B a su encuentro salió otro turista, quien recorría en una hora la vigésima parte de todo el camino de B a A y se encontró con el primero después de tantas horas, como kilómetros por hora el mismo hace. Determine la distancia de A a B.

27. La anchura de un rectángulo mide 8 pulgadas menos que su longitud. Si su área es de 33 pulgadas cuadradas, ¿Cuáles son sus dimensiones?

28. Un rectángulo tiene su longitud 7 centímetros mayor que su ancho; siendo su área 228 centímetros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones?

29. Dos mangueras pueden llenar un depósito en 4 horas, cuando se usan ambas al mismo tiempo. ¿Cuántas horas se necesitaran para que cada manguera por si sola llene el depósito, si la de menor diámetro tarda 3 horas mas que la de mayor diámetro?

30. La presión p, en libras por pie cuadrado, del viento que sopla a v millas/hora se determina por medio de la fórmula $p = 0,003v^2$. Si el medidor de dicha presión, en un puente, registra una presión del viento de 14,7 libras/pie2, ¿Cuál es la velocidad del viento?

31. Una prensa de imprenta nueva puede hacer un trabajo en 1 hora menos que otra, más antigua. Juntas, pueden realizar el mismo trabajo en 1,2 horas. ¿Cuánto tiempo tardara cada una sola en efectuar dicho trabajo?

32. Una lancha rápida tarda 1 hora mas en viajar 24 km contra la corriente de un rió que en el viaje de regreso. Si la lancha viaja a 10 km/h en agua tranquila, ¿Cuál es la velocidad de la corriente en su viaje de 24 km?

33. ¿Cuáles son las dimensiones del mayor campo rectangular que se puede cercar con 1200 metros de valla?

34. ¿Aproximadamente a que distancia estará el horizonte de un avión que vuela a 2 millas de altura? Suponemos que el radio de la tierra mide 4000 millas.

35. Dos embarcaciones se separan perpendicularmente una de la otra, al partir al mismo tiempo del mismo muelle; 1 hora después, están a 13 km de distancia. Si una de ellas viaja 7 km/h mas aprisa que la otra, ¿Cuál es la velocidad de cada una?

36. Una bandera tiene una cruz blanca, de anchura uniforme, sobre fondo rojo. Encuentre la anchura de dicha cruz, que abarque exactamente la mitad del área total, dado que la bandera mide 4 por 3 pies.

37. A 20 millas/hora, un automóvil choca con un objeto estacionario, con la misma fuerza que tendría si hubiera caído 13,5 pies; es decir, como si lo hubieran arrojado de la azotea de una casa ordinaria de una sola planta. En general, un auto que se mueve a r millas/hora golpea a un objeto estacionario con una fuerza de impacto equivalente a la que ejercería, al caer de cierta altura a, dada por la formula $a = 0,0336r^2$. ¿A que velocidad, aproximadamente, deberá desplazarse un auto si se estrellara con tanta fuerza como si hubiera sido arrojado de un edificio de 12 pisos; es decir, desde 121 pies de altura?

38. En una ciudad, en un día determinado, la ecuación de la demanda de gasolina es $d = \frac{900}{p}$, y la ecuación de la oferta es $s = p - 80$, donde d y s denotan el número de galones demandados y suministrados, respectivamente (en millares), al precio de p centavos de dólar por galón. Encuentre el precio al que la oferta resulta igual a la demanda.

39. Dos turistas A y B salieron simultáneamente de distintos lugares al encuentro mutuo. Al encontrarse resultó que A recorrió 210 km más que B. Si cada uno de ellos continúa su camino a la velocidad anterior, A llegará al lugar de salida de B después de 4 días, y B llegará al lugar de salida de A después de 9 días. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno de ellos hasta el encuentro?

40. Si se arroja una flecha verticalmente en el aire (desde el suelo), con una velocidad inicial de 176 pie/seg, su altura y respecto del suelo, t segundos después de haberla arrojado (sin tomar en cuenta la resistencia del aire), esta dada por $y = 176t - 16t2$:

a) Encuentre el tiempo en que $y = 0$, e interprete físicamente este resultado.

b) Encuentre los tiempos en que $y = 1$ pies de altura.

41. El mínimo número de pies, d, necesarios para obtener, en las mejores condiciones posibles, a un auto que viaje a una velocidad de v millas/hora, ya incluido el tiempo de reacción, esta dado por la fórmula $d = 0,044v2 + 1,1v$. Calcule la velocidad de un auto que necesita 165 pies para detenerse, después de haberse advertido el peligro.

6.11. Ecuación simétrica de tercer y cuarto grados

Una ecuación algebraica de tercer grado, se denomina simétrica, si tiene por expresión

$$Ax^3 + Bx^2 + Bx + A = 0 \ \ (A \neq 0)$$

Transformemos el polinomio $Ax^3 + Bx^2 + Bx + A$, empleando con este fin el método de descomposición de un polinomio en factores. Es evidente que se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Ax^3 + Bx^2 + Bx + A &= A(x^3+1) + Bx(x+1) \\ &= A(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x+1) \\ &= (x+1)[A(x^2-x+1)+Bx] \\ &= (x+1)[Ax^2+(B-A)x+A] \end{aligned}$$

por lo cual la ecuación $Ax^3 + Bx^2 + Bx + A = 0$ es equivalente a la ecuación

$$(x+1)[Ax^2+(B-A)x+A] = 0 \;\; (A \neq 0)$$

Esta ecuación es, a su vez, equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+1 = 0 \\ Ax^2+(B-A)x+A = 0, \;\; A \neq 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, la ecuación $Ax^3 + Bx^2 + Bx + A = 0$ es también equivalente a este sistema. La solución de este sistema se halla con facilidad, puesto que ésta contiene solamente ecuaciones de primer y segundo grados.

Ejemplo 6.48 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
a) $x^3 - 2(x+1) = x;$ **b)** $3x^3 - 3x(x-1) = 7x^2;$ **c)** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$
Solución
a) $x^3 - 2(x+1) = x \;\; \Rightarrow \;\; x^3 - x - 2(x+1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x(x^2-1) - 2(x+1) = 0$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x+1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; (x+1)(x^2-x-2) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(x-2) = 0$$

Por lo tanto encontramos que $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.
b) $3x^3 - 3x(x-1) = 7x^2 \;\; \Rightarrow \;\; (3x^3 - 7x^2) - 3x(x-1) = 0$

$$x(3x^2-7x) - 3x(x-1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x(3x^2-10x+3) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x(3x-1)(x-3) = 0$$

De esta ecuación, encontramos $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$ y $x_3 = 3$.
c) $(x^3 - x^2) + (x-1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x^2(x-1) + (x-1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; (x^2+1)(x-1) = 0$
De donde se concluye que la solución de la ecuación está dada por $x = 1$, ya que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Una ecuación algebraica de cuarto grado se denomina simétrica, si tiene por expresión

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0, \;\; (A \neq 0)$$

Teniendo en cuenta que $A \neq 0$, escribamos esta ecuación en la forma equivalente:

$$(x^4+1) + \frac{B}{A}x(x^2+1) + \frac{C}{A}x^2 = 0, \;\; (A \neq 0).$$

Es evidente la validez de la siguiente igualdad:

$$(x^4+1) + \frac{B}{A}x(x^2+1) + \frac{C}{A}x^2 = (x^4+2x^2+1) + \frac{B}{A}x(x^2+1) + \left(\frac{C}{A} - 2\right)x^2$$

$$= (x^2+1)^2 + 2(x^2+1)\frac{Bx}{2A} + \left(\frac{Bx}{2A}\right)^2 + x^2\left(\frac{C}{A} - 2 - \frac{B^2}{4A^2}\right)$$
$$= \left(x^2 + \frac{B}{2A}x + 1\right)^2 - \frac{B^2 - 4A(C-2A)}{4A^2}x^2.$$

La validez de esta igualdad predetermina que la ecuación simétrica es equivalente a la ecuación

$$\left(x^2 + \frac{B}{2A}x + 1\right)^2 - \frac{B^2 - 4A(C-2A)}{4A^2}x^2 = 0, \quad A \neq 0.$$

Según sea el número $B^2 - 4A(C-2A)$, son posibles tres casos:

CASO 1. $B^2 - 4A(C-2A) < 0$:
La última ecuación y, por lo tanto, la ecuación equivalente a ella, no tienen raíces reales.

CASO 2. $B^2 - 4A(C-2A) = 0$:
La última ecuación adquiere en este caso la forma

$$\left(x^2 + \frac{B}{2A}x + 1\right)^2 = 0$$

Es evidente que esta ecuación es equivalente a la ecuación

$$x^2 + \frac{B}{2A}x + 1 = 0$$

Por consiguiente, el conjunto de raíces de la ecuación simétrica de cuarto grado coincide en este caso con el conjunto de raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + \frac{B}{2A}x + 1 = 0, \; A \neq 0.$$

CASO 3. $B^2 - 4A(C-2A) > 0$:
La última ecuación y, por lo tanto, la ecuación equivalente a ella, son equivalentes al sistema de ecuaciones cuadráticas

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{B + \sqrt{B^2 - 4A(C-2A)}}{2A}x + 1 = 0, \quad A \neq 0 \\ x^2 + \dfrac{B - \sqrt{B^2 - 4A(C-2A)}}{2A}x + 1 = 0, \quad A \neq 0 \end{cases}$$

cada una de las cuales se resuelve con facilidad.

Ejemplo 6.49 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
a) $x^4 - x(x^2 - x + 1) = 0$; **b)** $(x^2 - 5x + 7) - 2(x-2)(x-3) = 1$.
Solución
a) $x^4 - x^3 + x^2 - x = 0 \;\Rightarrow\; x^3(x-1) + x(x-1) = 0$
$(x^3 + x)(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x(x^2+1)(x-1) = 0$.
Como $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ son las raíces de la ecuación.
b) $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2(x-3)^2 = 0$
De aquí se obtiene $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

6.12. Tarea

1. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\dfrac{x^2-1}{2x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$;

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2}-\dfrac{x}{2}=1-\dfrac{x^2-4}{x}$;

c) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-7x+12}=\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+3x-8}$;

d) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{5(2-x^2)}{2x}$;

e) $\dfrac{3-5x}{x+2}=2+\dfrac{x-11}{x+4}$;

f) $x^2+4x-\dfrac{7}{x^2+4x+5}=1$;

g) $\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{4}{x+7}=1$;

h) $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+8}=0$;

i) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}=\dfrac{6}{x-1}$;

j) $\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{x^2}$;

k) $\dfrac{2x+1}{x+3}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$;

l) $\dfrac{2}{x-14}-\dfrac{5}{x-13}=\dfrac{2}{x-9}-\dfrac{5}{x-11}$;

m) $\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}+1=\dfrac{2x+1}{x+3}$;

n) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

2. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+1}{x^2-x-1}=1-\dfrac{x+1}{x-1}$;

b) $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x-1}-\dfrac{1}{3x+1}=0$;

c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{30}$;

d) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x}=0$;

e) $(x+9)(x-1)(2x^2+16x-20)=12$;

f) $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11)+1=0$;

g) $(1-x)(x+2)(x+3)=9x^2-x^3+4(1+7x)$.

6.13. Ecuaciones de orden superior

Una ecuación algebraica se llama binomia, si tiene por expresión

$$x^n-A=0$$

Primeramente examinemos la ecuación binomia en el caso particular cuando $A=1$:

$$x^n-1=0$$

Para $n=1$ esta ecuación es un caso particular de la ecuación de primer grado y por ello tiene la única raíz $x_1=1$. Cuando $n=2$, esta ecuación representa un caso particular de la ecuación cuadrática con discriminante positivo, por lo cual tiene solamente dos raíces: $x_1=1$ y $x_2=-1$.

Mostremos ahora que para $n\geq 3$, para cualquier n impar, esta ecuación tiene una sola raíz real $x_1=1$, y para todo n par esta ecuación tiene solamente dos raíces reales $x_1=1$ y $x_2=-1$.

Sea n un número natural impar fijo, $n\geq 3$, es decir, sea $n=2k+1$, donde k es un número natural fijo.

Aprovechando la fórmula de multiplicación reducida, obtenemos la validez de la igualdad:

$$x^{2k+1}-1=(x-1)(x^{2k}+x^{2k-1}+...+x^2+x+1).$$

De la validez de esta igualdad se desprende que, para $n = 2k + 1$, la ecuación binomia es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^{2k} + x^{2k-1} + ... + x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación de este sistema tiene la única raíz $x = 1$, la segunda ecuación del sistema no tiene raíces reales. Con el fin de demostrarlo, mostremos que para cualquier x real se verifica la desigualdad

$$x^{2k} + x^{2k-1} + ... + x^2 + x + 1 > 0$$

En efecto, para cualquier $x \in [-1; 0)$, al escribir el primer miembro de la desigualdad en la forma

$$x^{2k} + x^{2k-2}(x + 1) + ... + x^2(x + 1) + (x + 1)$$

nos convencemos de que el primer sumando de esta suma es positivo y los demás, no negativos. Quiere decir, para cualquier $x \in [-1; 0)$ la desigualdad es válida.

Escribiendo el primer miembro de la desigualdad en la forma

$$x^{2k-1}(x + 1) + x^{2k-3}(x + 1) + ... + x(x + 1) + 1$$

nos convencemos de que para cualquier $x \in (-\infty; -1)$ todos los sumandos de esta suma son positivos. Quiere decir, para todo $x \in (-\infty; -1)$ la desigualdad es válida.

Así pues, se ha demostrado la validez de la desigualdad para cualquier x real y esto significa que la ecuación

$$x^{2k} + x^{2k-1} + ... + x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raíces reales. Por tanto, la ecuación tiene, para $n = 2k + 1$, una sola raíz real $x_1 = 1$.

Sea ahora $n = 2k$, k es un número natural fijo y $k \geq 2$. Aprovechando la fórmula de multiplicación reducida, llegamos a que se verifica la igualdad idéntica

$$x^{2k} - 1 = (x^2 - 1)[x^2(k - 1) + x^2(k - 2) + ... + x^4 + x^2 + 1].$$

Por cuanto esta igualdad idéntica es valida, resulta que la ecuación binomia es equivalente, para $n = 2k$ $(k \geq 2)$, al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + ... + x^4 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación de este sistema tiene dos raíces, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, mientras que la segunda ecuación no tiene raíces reales, puesto que para cualquier x real se verifica, evidentemente, la desigualdad

$$x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + ... + x^4 + x^2 + 1 > 0.$$

Por consiguiente, para $n = 2k$, la ecuación binomia tiene dos raíces reales: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Así pues, cualquiera que sea n impar, la ecuación binomia tiene una sola raíz real $x_1 = 1$, y para cualquier n par, solamente dos raíces reales: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Razonando análogamente, podemos mostrar que:

1. Para cualquier a positivo, la ecuación binomia tiene:

   a) Una sola raíz real $x_1 = \sqrt[n]{A}$, para cualquier n impar;

   b) Solamente dos raíces reales, $x_1 = \sqrt[n]{A}$ y $x_2 = -\sqrt[n]{A}$, para cualquier n par.

2. Cuando $A = 0$, la ecuación binomia tiene una sola raíz $x_1 = 0$.

3. Para cualquier A negativo se puede mostrar que la ecuación binomia tiene:

   a) Una sola raíz real, $x_1 = -\sqrt[n]{-A}$, para cualquier n impar;

   b) No tiene raíces reales, cualquiera que sea n par.

La ecuación algebraica de la forma

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$$

se denomina trinomia a condición de que $n \geq 2$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Cuando $n = 2$, la ecuación trinomia se llama, además ecuación bicuadrada.

Al resolver la ecuación bicuadrada

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0, \quad A \neq 0$$

su primer miembro se transforma por el método de formación de cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} Ax^4 + Bx^2 + C &= A\left\{\left[x^4 + 2x^2 \cdot \frac{B}{2A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right]\right\} \\ &= A\left[\left(x^2 + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right] \end{aligned}$$

En virtud de esta igualdad la ecuación (17) es equivalente a la siguiente

$$A\left[\left(x^2 + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right], \quad A \neq 0$$

Es evidente que si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación (18) y, por lo tanto, la ecuación (17), equivalente a la (18), no tienen raíces.

Cuando $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación (18) adquiere la forma

$$\left(x^2 + \frac{B}{2A}\right)^2 = 0, \quad A \neq 0$$

La ecuación (19) es, obviamente, equivalente a la ecuación

$$x^2 + \frac{B}{2A} = 0, \quad A \neq 0$$

De este modo, cuando $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación bicuadrada equivalente a la ecuación cuadrática, es decir, para $\frac{B}{2A} < 0$ tiene tan sólo dos raíces reales, $x_1 = \sqrt{-\frac{B}{2A}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{B}{2A}}$; para $\frac{B}{2A} = 0$, la única raíz $x_1 = 0$; para $\frac{B}{2A} > 0$, no tiene raíces.

En cambio, si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación (18) y, por consiguiente, la ecuación (17), que es equivalente a (18), son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = 0, & A \neq 0 \\ x^2 + \frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = 0, & A \neq 0 \end{cases}$$

Escribamos este sistema en la forma equivalente

$$\begin{cases} x^2 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, & A \neq 0 \\ x^2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, & A \neq 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Por cuanto los números que figuran en los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (21) son raíces de la ecuación cuadrática

$$At^2 + Bt + C = 0, \quad A \neq 0 \tag{6.2}$$

que tiene discriminante positivo $\Delta = B^2 - 4AC$, entonces el sistema de ecuaciones (21) puede ser escrito en la forma:

$$\begin{cases} x^2 = t_1, & A \neq 0 \\ x^2 = t_2, & A \neq 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

donde t_1 y t_2 son raíces de la ecuación (22).

Cuando $n > 2$, para resolver la ecuación trinomia

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0, \quad A \neq 0$$

el primer miembro de ésta también se transforma por el método de formación de cuadrado perfecto

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = A\left[\left(x^n + \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right] \tag{6.4}$$

En virtud de esta igualdad, la ecuación (21) es equivalente a la ecuación

$$\left(x^n + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}, \quad A \neq 0 \tag{6.5}$$

Es evidente que si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación (25), y, por tanto, la ecuación (21) no tiene raíces.

Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación (25) es equivalente a la ecuación binomia

$$x^n + \frac{B}{2A} = 0, \quad A \neq 0 \tag{6.6}$$

Por consiguiente, cuando $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación trinomia (16) es equivalente a la ecuación binomia (26), cuya resolución fue examinada en el punto anterior.

En cambio, si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación (25) es equivalente al sistema de ecuaciones binomias

$$\begin{cases} x^n + \frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = 0, & A \neq 0 \\ x^n + \frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = 0, & A \neq 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

cuya ecuación, como se mostró más arriba, puede ser determinada.

Ejemplo 6.50 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
a) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$; **b)** $x^5 + x^3 = x^4$; **c)** $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.
Solución
a) Si $x^2 = t$, la ecuación se transforma en la siguiente

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \;\Rightarrow\; (t+4)(t-2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

Reemplazando el cambio original, obtenemos:

$$\begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 = 2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = \sqrt{-4}, \;\; x = -\sqrt{-4} \\ x = \sqrt{2}, \;\; x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

La ecuación original tiene dos raíces complejas y dos raíces reales.

b) $x^5 - x^4 + x^3 = 0 \;\Rightarrow\; x^3(x^2 - x + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; x = 0.$

c) Haciendo $x^3 = t$, obtenemos

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (t-1)(t-2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Volviendo a la variable original, obtenemos

$$\begin{cases} x^3 - 1 = 0 \\ x^3 - 2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ (x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}\,x + 2) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ejemplo 6.51 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
a) $x^9 - 2x^5 + x = 0$; **b)** $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 2) = 12$.
Solución

a) $x(x^8 - 2x^4 + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x^8 - 2x^4 + 1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ (x^4 - 1)^2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 2) - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x^8 + 2x^6 + 4x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

$$(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^4 + x^2 + 5) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

6.14. Tarea

1. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0;$
b) $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0;$
c) $x^3 + 4x^2 - 24 = 0;$
d) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0;$
e) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1;$
f) $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0;$
g) $4x^3 + 10x^2 - 14x - 5 = 0;$
h) $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0;$
i) $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 27;$
j) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0;$
k) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8;$
l) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0;$
m) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24 = 0;$
n) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0;$
o) $x^3 - x^2 - \dfrac{8}{x^3 - x^2} = 2;$
p) $(x+1)(x^2+2) + (x+2)(x^2+1) = 2;$
q) $3\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0;$
r) $\dfrac{(3+x)(2+x)(1+x)}{(3-x)(2-x)(1-x)} = -35;$
s) $\dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{x-4}{x-3} + \dfrac{x+4}{x+3} - \dfrac{28}{15};$
t) $2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 3 = 0;$
u) $2x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 15 = 0;$
v) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0;$
w) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1;$
x) $x(x-1)(x-2)(x-3) = 15;$
y) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2,9;$
z) $\dfrac{3}{1 + x + x^2} = 3 - x - x^2;$

2. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $(2x^2 + 6x - 20)(3x^2 - 14x - 5) = 0;$
b) $(x^3 - 2x^2 - 3x + 4)(x^3 - 7x - 6) = 0;$
c) $(x^6 - 1)(x^6 - 9x^4 - x^2 + 9) = 0;$
d) $(x^2 - 1)(x^3 + 5x^2 - 3x - 15) = 0;$
e) $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24;$
f) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3;$
g) $(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = 4,5;$
h) $(x - 4,5)^4 + (x - 5,5)^4 = 1;$
i) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16;$
j) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0;$
k) $4x^3 - 3x - 1 = 0;$
l) $38x^3 + 7x^2 - 8x - 1 = 0;$
m) $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0;$
n) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 5\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{x}\right);$
o) $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 9 = 0;$
p) $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47;$
q) $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4;$
r) $16x^3 - 28x^2 + 4x + 3 = 0;$
s) $\dfrac{x^2 - 6x - 9}{x} = \dfrac{x^2 - 4x - 9}{x^2 - 6x - 9};$
t) $(x^4 + 2x^2 + 1)(x^4 - 2x^2 + 1) = 0;$
u) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 27x - 108 = 0;$
v) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 3) - 4 = 0;$
w) $(x^3 - 1)(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) = 0;$
x) $(x^4 - 1)(x^6 + 4x^4 - x^2 - 4) = 0;$
y) $(4x^2 - 8x + 3)(3x^3 - 2x^2 - 7x - 2) = 0.$

3. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0;$
b) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 3} + \dfrac{2}{x^2 - 3x + 4} = \dfrac{6}{x^2 - 3x + 5};$
c) $(3x^3 + 7x - 10)(8x3 - 14x^2 + 19x - 4) = 0;$
d) $4x^3 + 3x^2 - 5(4x+3) = 2x^3 - 5x(2 + 5x - x^3);$
e) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 9x)(x^2 + 2x - 8);$
f) $(3x^2 - 7x + 2)(x^2 - 9) = (2x^2 - 5x - 3)(9x^2 - 6x + 1);$
g) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12) = 0;$
h) $(x^3 + x^2 - 5x - 5)(125x^3 - 50x^2 - 25x + 6) = 0;$
i) $(15x^2 + 8x + 1)(8x^3 - 52x^2 + 94x - 35) = 0;$

j) $(x^3-x^2-x+1)(x^5+x^4-13x^3-13x^2+36x+36)=0;$
k) $(x^4-1)(x^5-x^4-5x^3+5x^2+4x-4)=0;$
l) $(x^3-x^2+x-1)(x^5+2x^4-17x^3-34x^2+16x+32)=0;$
m) $(x^3-x^2+2x-2)(x^4-5x^2+4)=0;$
n) $(x^3-6x^2+5x+12)(x^5-9x^3-12x^2-52x-48)=0.$

4. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6;$
b) $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5;$
c) $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{2x-6}=2;$
d) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)};$
e) $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1;$
f) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1,5(x+4);$
g) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1;$
h) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2;$
i) $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}=x^2-1;$
j) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1;$
k) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x;$
l) $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x};$
m) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=3;$
n) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12};$
o) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25};$
p) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=0;$
q) $2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48;$
r) $\sqrt[3]{2x(4x^2+3)-1-12x^3}+x=x^2-11;$
s) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-8}=3;$
t) $1-x=\sqrt{1-\sqrt{4x^2-7x^4}};$
u) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1;$
v) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3;$
w) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x};$
x) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7;$
y) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1;$
z) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3.$

5. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22;$
b) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2;$
c) $\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\dfrac{3+x}{2-x}}=2;$
d) $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2;$
e) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12};$
f) $4x-3\sqrt[3]{x}-1=0;$
g) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7;$
h) $x+\sqrt[3]{x}-2=0;$
i) $x-4\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+6=0;$
j) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=0;$
k) $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1;$
l) $\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2+x+3}=\sqrt{2x^2+8};$
m) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6;$
n) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0;$
o) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}=1;$
p) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1};$
q) $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5;$
r) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5.$

6. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0;$
b) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8};$
c) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4;$
d) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18};$
e) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3;$
f) $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35+x^3})=30;$
g) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9;$
h) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}=\sqrt{2};$
i) $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5;$

j) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5;$

k) $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3;$

l) $4(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=x;$

m) $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x}=3;$

n) $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2};$

o) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x.$

7. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16;$

b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x;$

c) $\sqrt[3]{4-4x+x^2}+\sqrt[3]{49+14x+x^2}=3+\sqrt[3]{14-5x-x^2};$

d) $\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1;$

e) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9};$

f) $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+10};$

g) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1;$

h) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=3;$

i) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4;$

j) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2};$

k) $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x};$

l) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2-3x+2};$

m) $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0;$

n) $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)}=2;$

o) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1;$

p) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+66}-x^2}=5.$

8. Encuentre las raíces reales de la ecuación:

a) $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}}=1;$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+1}}=1;$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{x}{x^2+x-1};$

d) $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+3x+1}}{\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+3x+1}}=1;$

e) $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+4x+1}}{\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}}=1;$

f) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}.$

6.15. Sistemas de ecuaciones no lineales

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se llama sistema de segundo grado, si al menos una de las ecuaciones es de segundo grado.

Resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas significa hallar todos los pares de valores de x e y que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones. Estos pares de valores de x e y se llaman soluciones del sistema.

Para resolver un sistema no lineal, se aconseja despejar una incógnita de la ecuación lineal y sustitúyase en la ecuación cuadrática. Como esto lleva a una ecuación cuadrática en una incógnita, el sistema se puede resolver siempre.

La resolución de un sistema de dos ecuaciones de segundo grado en dos incógnitas lleva a una ecuación de cuarto grado en una de las incógnitas.

En ciertos casos los sistemas de ecuaciones se resuelven más elegantemente que por el método de sustitución, si se recurre a procedimientos especiales.

Ejemplo 6.52 *Resuelva el sistema de ecuaciones:*

a) $\begin{cases} x+y=11; \\ x^2+xy+y^2=91. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y=1; \\ x^3+8y^3=127. \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19; \\ x^4+x^2y^2+y^4=741. \end{cases}$

Solución

a) De la primera ecuación, despejamos x y reemplazamos en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x=11-y \\ (11-y)^2+(11-y)y+y^2=91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11-y \\ y^2-11y+30=0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos $y_1 = 6$ y $y_2 = 5$. Sustituyendo estos valores en la ecuación $x = 11 - y$, obtenemos $x_1 = 5$ y $x_2 = 6$. De esta manera la solución del sistema de ecuaciones está dada por (5, 6) y (6, 5).

b) Transformamos la segunda ecuación del sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x^3+(2y)^3=127 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=127 \end{cases}$$

Reemplazamos la primera ecuación en la segunda

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-2xy+4y^2=127 \end{cases}$$

Despejamos x en la primera ecuación y luego sustituimos en la segunda ecuación

$$\begin{cases} x=1-2y \\ (1-2y)^2-2(1-2y)y+4y^2=127 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 2y^2-y-21=0 \end{cases}$$

Resolviendo la segunda ecuación, obtenemos que $y_1 = -3$ y $y_2 = \frac{7}{2}$. Sustituyendo estos valores en la primera ecuación, resulta que $x_1 = 7$ y $x_2 = -6$. Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones está dada por (7, -3) y $\left(-6, \frac{7}{2}\right)$.

c) A la segunda ecuación le sumamos y restamos x^2y^2 y obtenemos

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ (x^2+y^2)^2-x^2y^2=741 \end{cases}$$

Despejamos x^2+y^2 en la primera ecuación y luego sustituimos en la segunda ecuación

$$\begin{cases} x^2+y^2=19+xy \\ (19+xy)^2-x^2y^2=741 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=19+xy \\ xy=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=29 \\ xy=10 \end{cases}$$

Sumamos y restamos $2xy$ a la primera ecuación y obtenemos

$$\begin{cases} (x-y)^2 - 9 = 0 \\ xy = 10 \end{cases}$$

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda, obteniendo

$$\begin{cases} x = y+3, \quad x = y-3 \\ x = \frac{10}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y+3, \quad x = y-3 \\ (y+3)y = 10, \quad (y-3)y = 10 \end{cases}$$

Resolviendo la segunda ecuación, resulta

$$\begin{cases} x = y+3, \quad x = y-3 \\ y^2 + 3y - 10 = 0, \quad y^2 - 3y - 10 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y+3, \quad x = y-3 \\ \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -5 \end{cases}, \begin{cases} y_3 = 5 \\ y_4 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores de y en la primera ecuación y obtenemos

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -5 \end{cases}, \begin{cases} y_3 = 5 \\ y_4 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Finalmente, la solución del sistema está dada por (5, 2), (-2, -5), (2, 5) y (-5, -2).

Ejemplo 6.53 *Resuelva el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} xy + 2x + y = 7 \\ yz + 3y + 2z = 12 \\ xz + z + 3x = 15 \end{cases}$$

Solución
Para resolver este sistema, hacemos lo siguiente: despejamos y en la primera y segunda ecuaciones

$$\begin{cases} y = \frac{7-2x}{x+1} \\ y = \frac{12-2x}{z+3} \\ xz + z + 3x = 15 \end{cases}$$

Igualamos las dos primeras ecuaciones:

$$\frac{7-2x}{x+1} = \frac{12-2x}{z+3} \quad \Rightarrow \quad z = 2x - 1$$

Sustituimos z en la tercera ecuación y resolvemos la ecuación obtenid:

$$(2x-1)x + (2x-1) + 3x = 15 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en $z = 2x - 1$ y obtenemos $z_1 = -9$ y $z_2 = 3$. Para encontrar los valores de y, sustituimos los valores de z en la segunda ecuación del sistema y entonces $y_1 = -5$ y 1. La solución general del sistema esta dada por (-4, -5, -9) y (2, 1, 3).

Lo principal que reúnen los problemas de aplicación, es que la condición de un problema se enuncia solamente en la forma de un texto, sin fórmulas ni designaciones algebraicas de las incógnitas. Los problemas del tipo habitual, en los cuales todas las condiciones se escriben en forma de ecuaciones, no presentan, como regla general, grandes dificultades, aunque ciertos elementos de estos problemas causan a veces situaciones embarazosas. En lo que se refiere a los problemas más complicados, su dificultad se explica, por lo común, por el carácter no habitual, y necesita no sólo resolver ciertos sistemas de ecuaciones o desigualdades sino saber razonar.

En este caso resulta a menudo que los razonamientos sencillos, sin componer ecuaciones y desigualdades, aunque sea posible componerlas, hacen llegar más fácil y rápidamente a la meta. Además, a veces se puede resolver un problema por simples razonamientos y hasta más rápido que por los métodos matemáticos corrientes. Sin embargo, la resolución por razonamientos simples no siempre es rigurosa y debe completarse con cálculos matemáticos rigurosos.

Ejemplo 6.54 *Una lámina rectangular de estaño de perímetro 96 cm se usa para hacer una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de 4 cm de lado en cada esquina y se unen los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina si el volumen de la caja es de 768* cm^3*?*

Solución

Sean:

x : longitud de la lámina en centímetros.

y : ancho de la lámina en centímetros.

Entonces la caja tiene las dimensiones siguientes: longitud$=(x-8)$ cm, ancho$=(y-8)$ cm, altura$=4$ cm.

Por hipótesis, volumen y perímetro son:

$$\begin{cases} 4(x-8)(y-8)=768 \\ 2x+2y=96 \end{cases}$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{cases} (x-8)(y-8)=192 \\ x+y=48 \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación y reemplazando en la primera, obtenemos

$$x^2-48x+512=0 \quad \Rightarrow \quad (x-32)(x-16)=0 \quad \Rightarrow \quad x=32 \quad \vee \quad x=16$$

Notese que si $x=32$, entonces $y=16$ y si $x=16$, entonces $y=32$. Como x es la longitud; las dimensiones de la lámina son 32 cm x 16 cm.

Ejemplo 6.55 *Un obrero hace un cierto número de piezas idénticas en un tiempo determinado. Si hubiera hecho 10 piezas más cada día, habría terminado el trabajo completo en* $4\frac{1}{2}$ *días antes de lo previsto, y si hubiese hecho 5 piezas menos cada día habría tardado 3 días más de lo previsto. ¿Cuántas piezas hizo y en cuánto tiempo?*

Solución

Supongamos que el obrero hace x piezas en y días. Entonces produce $\frac{x}{y}$ piezas por día, por hipótesis, si hubiera realizado $\frac{x}{y}+10$ piezas, habría completado el trabajo en $y-4\frac{1}{2}$ días. Luego como $4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ tenemos

$$\left(\frac{x}{y}+10\right)\left(y-\frac{9}{2}\right)=x$$

La otra condición de la ecuación es

$$\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x$$

Así, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 10y - \frac{9x}{2y} = 45 \\ -5y + \frac{3x}{y} = 15 \end{cases}$$

de donde $\frac{x}{y} = 50$, luego, $y = 27$ y $x = 1350$.

Ejemplo 6.56 *Dos obreros tienen que hacer un trabajo consistente en mecanizar un lote de piezas idénticas. Después que el primero ha trabajado durante 7 horas y el segundo durante 4 horas, han completado $\frac{5}{9}$ del total del trabajo. Si siguieron trabajando los dos a la vez durante 4 horas más, les quedaría por hacer $\frac{1}{18}$ del trabajo. ¿Cuánto tardaría cada uno en hacer el trabajo completo?*
Solución
Supongamos que el primer operario, trabajando solo, es capaz de completar el trabajo en x horas, y el segundo en y horas. Entonces en una hora el primero hace $\frac{1}{x}$ del trabajo completo y el segundo $\frac{1}{y}$. Por hipótesis

$$7\frac{1}{x} + 4\frac{1}{y} = \frac{5}{9}$$

Como después trabajan juntos otras 4 horas, harán $\frac{4}{x} + \frac{4}{y}$ del trabajo, que es igual a

$$1 - \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18}\right) = \frac{7}{18}$$

por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18}$$

Restándola de la primera, obtenemos

$$\frac{3}{x} = \frac{3}{18}$$

de donde $x = 18$ e $y = 24$. Luego el primero tarda 18 horas y el segundo 24 horas en hacer el trabajo completo.

Ejemplo 6.57 *Se ha de transportar 690 toneladas de mercancías desde un muelle a una estación de ferrocarril mediante 5 camiones de 3 toneladas y 10 camiones de una tonelada y media. En pocas horas, los camiones han transportado $\frac{25}{46}$ de las mercancías. Para completar el transporte a tiempo, se ha de llevar las mercancías restantes en un lapso 2 horas menor que el ya transcurrido. Se completó el transporte gracias a que los conductores de los camiones comenzaron a hacer un viaje por hora más que antes. Determine cuántas horas tardaron en transportar todas las mercancías y también el número de viajes por hora que se hacía al principio sabiendo que los camiones de una y media tonelada hacen un viaje más por hora que los camiones de 3 toneladas.*
Solución
Supongamos que la primera parte de las mercancías que asciende a $\frac{25}{46}690 = 375$ toneladas se transporta en x horas haciendo cada camión de 3 toneladas y viajes por hora. Entonces cada camión de una y media tonelada hará $y+1$ viajes por hora. Por hipótesis, la parte restante de mercancías (es decir, 690-375=315 toneladas) se transportó en $x-2$ horas, haciendo los camiones de 3 toneladas $y+1$ viajes por hora y los camiones de una y media toneladas $(y+1)+1 = y+2$ viajes por hora. Obtenemos así el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5 \cdot 3xy + 10 \cdot \frac{3}{2}x(y+1) = 375 \\ 5 \cdot 3(x-2)(y+1) + 10 \cdot \frac{3}{2}(x-2)(y+2) = 315 \end{cases}$$

simplificando tenemos

$$\begin{cases} 2xy + x = 25 \\ 2xy + 3x - 4y = 27 \end{cases}$$

de donde

$$2x - 4y = 2$$

luego $2y = x - 1$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x^2 = 25$, es decir, $x = 5$. La primera parte de las mercancías se transportó en 5 horas y la segunda parte en 5-2=3 horas. Todas las mercancías se transportaron en 8 horas; al principio, los camiones de tres toneladas hacían 2 viajes por hora y los de una y media toneladas, 3 viajes por hora.

Ejemplo 6.58 *Una industria tiene un encargo de 810 artículos y otra de 900 artículos en el mismo periodo de tiempo. La primera ha completado el pedido 3 días antes del plazo previsto y la segunda 6 días antes. ¿Cuántos artículos produce al día cada industria, sabiendo que la segunda produce por día 4 artículos más que la primera?.*

Solución

Sea x la producción de artículos diaria de la primera industria, entonces la segunda produce $x + 4$ artículos por día. La primera ha completado su pedido en $\frac{800}{x}$ días, luego el tiempo dado para cumplir el pedido ha sido $\frac{800}{x} + 3$ días. Análogamente tenemos que $\frac{900}{x+4} + 6$ es el tiempo asignado a la segunda industria, pero el tiempo asignado a ambas industrias es el mismo, luego

$$\frac{800}{x} + 3 = \frac{900}{x+4} + 6$$

de donde $x = 20$. Es decir, la primera industria produce 20 artículos y la segunda 24 artículos por día.

Ejemplo 6.59 *Hallar un número de dos cifras sabiendo que el número de unidades excede en cuatro al número de las decenas y que el producto del número deseado por la suma de sus dígitos es igual a 576.*

Solución

Si un número a tiene n dígitos a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, ordenados de izquierda a derecha, entonces

$$a = a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

Sea x el dígito de las unidades, y el dígito de las decenas, entonces por hipótesis se tiene la ecuación

$$x = y + 4$$

además el número deseado es $10y + x$ luego

$$(10y + x)(x + y) = 576 \quad \Rightarrow \quad (11y + 4)(2y + 4) = 576 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \quad \vee \quad y = -\frac{70}{11}$$

pero $y > 0$, luego $y = 4$. Por lo tanto el número buscado es 48.

Ejemplo 6.60 *Se tienen tres mezclas compuestas de tres elementos A, B y C. La primera mezcla consta sólo de los elementos A y B en proporción de peso de $3:5$, la segunda mezcla contiene solamente los elementos B y C en proporción de peso de $1:2$, en la tercera mezcla entran sólo los elementos A y C en proporción de peso de $2:3$. ¿En qué proporción se han de tomar estas mezclas para que la mezcla obtenida contenga los ingredientes A, B y C en proporción de peso de $3:5:2$?*

Solución

Ya que los elementos A y B componen la primera mezcla en proporción de $3:5$, entonces cada gramo de la primera mezcla contiene $\frac{3}{8}$ gr del elemento A y $\frac{5}{8}$ gr del elemento B. Análogamente, 1 gr de la segunda mezcla contiene $\frac{1}{3}$ gr del elemento B y $\frac{2}{3}$ gr del elemento C; 1 gr de la tercera mezcla contiene $\frac{2}{5}$ gr del elemento A y $\frac{3}{5}$ gr del elemento C.
Si tomamos x gr de la primera mezcla, y gr de la segunda y z gr de la tercera y las mezclamos, obtendremos $x+y+z$ gr de la nueva mezcla, con lo que ésta contendrá $\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z$ gr del elemento a, $\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y$ gr del elemento B y $\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z$ gr del elemento C. Tenemos que tomar la primera, segunda y tercera mezclas en tales cantidades que la mezcla obtenida contenga los elementos A, B y C en proporción de $3:5:2$, es decir, que 1 gr de la mezcla nueva comprenda $\frac{3}{10}$ gr del elemento A, $\frac{5}{10}$ gr del elemento B y $\frac{2}{10}$ gr del elemento C. Pues, en $x+y+z$ gr de la mezcla nueva habrá $\frac{2(x+y+z)}{10}$ gr del elemento A, $\frac{5(x+y+z)}{10}$ gr del elemento B y $\frac{2(x+y+z)}{10}$ gr del elemento C. Si igualamos diferentes expresiones para la misma cantidad de gramos de los elementos A, B y C, obtendremos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}x+\dfrac{2}{5}z=\dfrac{3(x+y+z)}{10} \\ \dfrac{5}{8}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{5(x+y+z)}{10} \\ \dfrac{2}{8}y+\dfrac{3}{5}z=\dfrac{2(x+y+z)}{10} \end{cases}$$

Notemos que aunque se hayan obtenido tres ecuaciones con tres variables, el sistema tiene solamente dos ecuaciones independientes. Esto es fácil demostrar, por ejemplo, así: sustrayendo de la igualdad $x+y+z=x+y+z$ la suma de las dos primeras ecuaciones, obtendremos la tercera ecuación. Por lo tanto, del sistema de ecuaciones hallaremos no las x, y, z sino la proporción $x:y:z$. Eliminando x, por ejemplo, de las dos primeras ecuaciones del sistema, hallamos que $y=2z$. Si colocamos este valor de y en cualquier ecuación del sistema, obtendremos que $x=\frac{20}{3}z$. Por consiguiente, $x:y:z=20:6:3$, es decir, hay que tomar la mezcla en proporción de peso $20:6:3$.

Ejemplo 6.61 *El por ciento (por el peso) de alcohol en tres soluciones forma una progresión geométrica. Si se mezclan la primera, segunda y tercera soluciones en proporción de peso de* $2:3:4$*, se obtendrá una solución de un 32 % de alcohol. Si estas se mezclan en proporción de peso de* $3:2:1$*, se obtendrá una solución de un 22 % de alcohol. ¿Qué por ciento de alcohol contiene cada solución?*

Solución

En la primera solución hay $x\,\%$, en la segunda $y\,\%$ y en la tercera, $z\,\%$ de alcohol. Esto significa que 1 g de la primera solución contiene $\frac{x}{100}$ g de alcohol, 1 g de la segunda solución, $\frac{y}{100}$ g de alcohol y 1 g de la tercera solución, $\frac{z}{100}$ g de alcohol. Si tomamos 2 g de la primera solución, 3 g de la segunda y 4 g de la tercera, obtendremos 9 g de una mezcla que contiene $2\cdot\frac{x}{100}+3\cdot\frac{y}{100}+4\cdot\frac{z}{100}$ g de alcohol. Según la condición del problema, la mezcla obtenida contiene un 32 % de alcohol, es decir, en 9 g de la mezcla hay $9\cdot\frac{32}{100}$ g de alcohol. De esta condición obtendremos una ecuación

$$\frac{2x+3y+4z}{100}=9\cdot\frac{32}{100}$$

Por analogía obtendremos una ecuación más:

$$\frac{3x+2y+z}{100}=6\cdot\frac{22}{100}$$

En fin, según la condición del problema, los números x, y, z forman una progresión geométrica por razón de que $y^2=xz$. Ahora nos queda resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=288 \\ 3x+2y+z=132 \\ y^2=xz \end{cases}$$

Al resolver las dos primeras ecuaciones con relación a y y z y al poner las expresiones obtenidas en la tercera ecuación, obtenemos la ecuación $x^2 - 76x + 768 = 0$, cuyas raíces son: $x_1 = 64$, $x_2 = 12$. Pero, el valor $x_1 = 64$ no satisface las condiciones del problema, porque el valor respectivo de $y = 48 - 2x$ es negativo. por eso, queda sólo $x = 12$. En este caso se halla fácilmente: $y = 24$ y $z = 48$. de tal modo, la primera solución contiene el 12 % de alcohol, la segunda, 24 % y la tercera, 48 %.

Ejemplo 6.62 *Un afluente desemboca en un río. A cierta distancia de la desembocadura del afluente está situado el punto A. en el río, a la misma distancia de la desembocadura del afluente se encuentra el punto B. el tiempo necesario para que una lancha a motor navegue, de ida y vuelta, del punto A a la desembocadura del afluente, y el tiempo requerido para que ésta cubra la distancia de ida y vuelta del punto B hasta la desembocadura del afluente, se refieren como* $32 : 35$. *Si la velocidad de la lancha a motor fuera en 2 km/h mayor, esta relación sería igual a* $15 : 16$, *y si la velocidad de la lancha a motor fuera en 2 km/h menor, esta relación sería igual a* $7 : 8$. *Hállese la velocidad de la corriente del río. (Las distancias se miden a lo largo del afluente y del río, respectivamente).*

Solución

Sea u km/h la velocidad de la corriente del río, v km/h, la velocidad de la lancha en agua muerta y w km/h, la velocidad de la corriente del afluente. Luego, la distancia desde el punto A hasta la desembocadura del afluente es igual a s km. Entonces, para superar la vía de ida y vuelta desee el punto A hasta la desembocadura del afluente la lancha necesita

$$t_1 = \frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} = \frac{2sv}{v^2 - w^2}$$

Ya que la distancia desde el punto B hasta la desembocadura del afluente es también igual a s km, la lancha, en su navegación de ida y vuelta desde B hasta la desembocadura del afluente, invierte

$$t_2 = \frac{s}{v+u} + \frac{s}{v-u} = \frac{2sv}{v^2 - u^2}$$

De la condición $t_1 : t_2 = 32 : 35$ obtenemos la primera ecuación

$$\frac{v^2 - u^2}{v^2 - w2} = \frac{32}{35}$$

De modo análogo se componen las otras dos ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{(v+2)^2 - u^2}{(v+2)^2 - w^2} = \dfrac{15}{16} \\ \dfrac{(v-2)^2 - u^2}{(v-2)^2 - w^2} = \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

Después de simplificarlo, este sistema de ecuaciones puede escribirse como:

$$\begin{cases} 3v^2 = 35u^2 - 32w^2 \\ (v+2)^2 = 16u^2 - 15w^2 \\ (v-2)^2 = 8u^2 - 7w^2 \end{cases}$$

De este sistema debemos hallar u. Este sistema se resuelve con facilidad si primero se elimina u, es decir, aquella incógnita que se busca. Al eliminar u, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2(v-2)2 - (v+2)^2 = w^2 \\ 35(v-2)^2 - 24v^2 = 11w^2 \end{cases}$$

Si de este sistema eliminamos w, obtenemos la ecuación

$$13(v-2)^2 + 11(v+2)^2 - 24v^2 = 0$$

de donde $v = 12$. Ahora se deduce que $w = 2$ y que $u = 4$. de tal modo hemos obtenido la solución: la velocidad de la corriente del río es de 4 km/h.

Ejemplo 6.63 *Dos ríos desembocan en un lago. Un barco sale del puerto M situado en el primer río, navega agua abajo hasta el lago atravesándolo y donde no hay ninguna corriente, y por el segundo río, agua arriba, contra la corriente, hasta el puerto N. Seguidamente el barco regresa. La velocidad del barco, sin tomar en cuenta la corriente es igual a v, la velocidad de la corriente del primer río es v_1; la del segundo río es v_2; el tiempo de movimiento del buque desde M hasta N es igual a t, y la distancia desde M hasta N es igual a S. El tiempo de navegación de regreso desde N hasta M, por la misma ruta, es también igual a t. Qué distancia recorre el buque por el lago en una dirección?*

Solución

Designamos por s_1 y s_2 las distancias desde los puertos M y N hasta el lago, y por s, la vía que pasa por el lago. Por la condición del problema tenemos: $s_1 + s + s_2 = S$. Es evidente que el tiempo empleado por el buque para superar la ruta de M a N, es igual a

$$\frac{s_1}{v+v_1} + \frac{s}{v} + \frac{s_2}{v-v_2} = t$$

análogamente, calculamos el tiempo necesario para superar la ruta de regreso. De este modo obtenemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas s_1, s_2, s:

$$\begin{cases} s_1 + s + s_2 = S \\ \dfrac{s_1}{v+v_1} + \dfrac{s}{v} + \dfrac{s_2}{v+v_2} = t \\ \dfrac{s_1}{v-v_1} + \dfrac{s}{v} + \dfrac{s_2}{v+v_2} = t \end{cases}$$

de estas incógnitas nos interesa la magnitud s.

Este sistema parece bastante complejo, aunque en principio no hay nada de eso: en realidad, si recordamos que v, v_1, v_2, S, t son constantes dadas, resulta claro que este sistema es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Y tal sistema siempre puede ser resuelto si eliminamos, sucesivamente las incógnitas.

No obstante, ocurre con frecuencia que lo simple en la teoría resulta muy complejo en la práctica. El método indicado para resolver nuestro problema es muy engorroso y presenta cálculos voluminosos porque los coeficientes de este nuevo sistema son bastante complejos.

Por esta razón, vamos a resolver el sistema valiéndonos de un método un poco artificial, pero breve. La segunda ecuación de este sistema puede presentarse en forma

$$v^2 s_1 - v v_2 s_1 + v^2 s + (v_1 - v_2) v s - v_1 v_2 s + v^2 s_2 + v v_1 s_2 = tv(v^2 + v v_1 - v v_2 - v_1 v_2)$$

Al sustituir la suma del primer miembro $v^2 s_1 + v^2 s + v^2 s_2$ por $v^2 S$, hay que referirse a la primera ecuación, y al agrupar los términos obtenemos la ecuación

$$v^2 S + v[v_1 s_2 - v_2 s_1 + (v_1 - v_2)s] - v_1 v_2 s = tv(v^2 + v v_1 - v v_2 - v_1 v_2)$$

así mismo puede transformarse también la tercera ecuación de nuestro sistema. Pero los cálculos pueden *economizarse* si notamos que la tercera ecuación es muy *parecida* a la segunda: si sustituimos s_1 y v_1 de aquélla por s_2 y v_2 y a la inversa, obtendremos la segunda ecuación. Por lo tanto, al sustituir s_1 y v_1 por s_2 y v_2 de la segunda ecuación ya transformada, y a la inversa, obtendremos la tercera ecuación transformada

$$v^2S + v[v_2s_1 - v_1s_1 + (v_2 - v_1)s] - v_2v_1s = tv(v^2 + vv_2 - vv_1 - v_2v_1)$$

Sumando ahora las igualdades obtenidas, tendremos

$$2v^2S - 2v_1v_2s = tv(2v^2 - 2v_1v_2)$$

de donde se deduce que la ruta buscada, que pasa por el lago, es:

$$s = v \cdot \frac{vS - v^2t + v_1v_2t}{v_1v_2} = vt + v^2 \cdot \frac{S - vt}{v_1v_2}$$

El problema queda completamente resuelto. Sin embargo, algunos estudiantes, al obtener la solución del problema con los datos algebraicos, consideran necesario aclarar con cuáles relaciones entre los datos esta solución tiene un sentido real (se superponen requerimientos de que las velocidades, las rutas, etc., son positivas, se introducen condiciones con las cuales los denominadores son distintos de cero, etc.) Claro está que una investigación correcta no empeora la resolución del problema, pero esta investigación no es un elemento lógicamente necesario de la resolución, porque en la condición del problema se sobreentiende que todos los procesos reales descritos tenían lugar y, por consiguiente, los datos algebraicos ya satisfacen las relaciones adecuadas. sin duda, se debe recurrir a tal investigación si lo exige la condición del problema.

Ejemplo 6.64 *Un automóvil sale del punto a hacia el punto B. En ese mismo instante del punto B hacia el punto A sale una motocicleta, pero a menor velocidad. Pasado cierto tiempo se encuentran; es este momento, del punto B hacia el punto A sale una segunda motocicleta que se encuentra con el automóvil en un punto que dista del punto de encuentro de ésta con la primera motocicleta 2/9 del camino desde A hasta B. Si la velocidad del automóvil fuera de 20 km/h menos, la distancia entre los puntos de encuentro sería igual a 72 km y el primer encuentro tendría lugar a las 3 horas después de la partida del automóvil desde el punto A. Hállese la distancia entre A y B. (Las velocidades de las motocicletas son iguales).*

Solución

Sea u km/h la velocidad del automóvil y la de la motocicleta, v km/h; sea s km la distancia AB; el automóvil y la primera motocicleta se encuentren después de t horas. El sistema de ecuaciones se compone fácilmente

$$\begin{cases} tu + tv = s \\ 3(u - 20) + 3v = s \\ \dfrac{\frac{2}{9}s}{u} = \dfrac{vt - \frac{2}{9}s}{v} \\ \dfrac{72}{u - 20} = \dfrac{3v - 72}{v} \end{cases}$$

Si de este sistema eliminamos la incógnita complementaria t y lo simplificamos, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} s = 3(u + v - 20) \\ 9uv = 2(u + v)^2 \\ v(u - 20) = 2(u + v - 20)^2 \end{cases}$$

Para hallar s hace falta buscar u y v que figuren en las dos últimas ecuaciones. Al notar que la segunda ecuación es la ecuación homogénea de segundo grado respecto a dos variables, hallaremos con facilidad la relación $u : v$. Ya que nos interesan u y v, distintos de cero, obtendremos, al dividir la segunda ecuación entre v_2, una ecuación cuadrática respecto a la nueva variable $z = \frac{u}{v}$:

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $z_1 = 2$ y $z_2 = \frac{1}{2}$, y por eso $u = 2v$. Poniendo este valor de u en la tercera ecuación hallamos que $v = 40$, de lo que se deduce que $u = 80$ y $s = 300$. De tal modo, la distancia AB queda hallada: $s = 300$ km.

Ejemplo 6.65 *Dos compañeros, al tener una sola bicicleta, partieron en el mismo instante del punto A hacia B; el primero de ellos se fue en bicicleta y el segundo, a pie. A cierta distancia de A el primero dejó la bicicleta en el camino y llegó caminando a B. El segundo, al llegar donde estaba la bicicleta, siguió en ésta. Ambos amigos llegaron juntos a B. En el camino de regreso del punto B al punto A procedieron de igual forma, pero el primero de ellos recorrió en bicicleta un kilómetro más que la vez primera. Por esto, el segundo amigo llegó al punto A 21 minutos más tarde que el primero. Determínese la velocidad de marcha de cada uno de los amigos si en bicicleta van a una velocidad de 20 km/h y caminando, la velocidad del primero en 3 minutos por km es mayor que la del segundo.*

Solución

Introduzcamos las siguientes designaciones:
s km, la distancia entre los puntos A y B;
v km/h, velocidad de marcha del primer compañero;
w km/h, velocidad de marcha del segundo compañero;
a km, distancia recorrida en bicicleta por el primer compañero desde A hasta B (de tal modo, éste dejó la bicicleta en un punto que dista a km de A y siguió caminando hasta B).
Es evidente que para recorrer todo el camino de A a B, el primer amigo gastó $\frac{a}{20} + \frac{s-a}{v}$ horas y el segundo, $\frac{a}{w} + \frac{s-a}{20}$ horas. Las condiciones de simultaneidad de partida y simultaneidad de llegada al punto B dan la primera ecuación

$$\frac{a}{20} + \frac{s-a}{v} = \frac{a}{w} + \frac{s-a}{20}$$

Los datos sobre la marcha de los amigos desde B hasta A permiten componer, en forma análoga, la segunda ecuación

$$\frac{a+1}{20} + \frac{s-a-1}{v} = \frac{a+1}{w} + \frac{s-a-1}{20} - \frac{7}{20}$$

Por cuanto el primer compañero emplea $\frac{1}{v}$ horas y el segundo, $\frac{1}{w}$ para 1 km, respectivamente, entonces de la condición del problema obtenemos de inmediato la tercera ecuación

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{v} = \frac{1}{20}$$

Así resultó un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Es imposible determinar todos los valores de las incógnitas s, a, v y w de este sistema; en este sentido el sistema es indeterminado. ¿Y significa esto que no podemos resolver nuestro problema? No. Pues, lo único que necesitamos, es hallar dos magnitudes incógnitas: las velocidades v y w. en este sistema ellas pueden hallarse unívocamente. con este fin, restamos la primera ecuación de la segunda y el resultado obtenido

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{v} = \frac{9}{20}$$

lo analizaremos junto con la tercera ecuación. Después de un cálculo hallamos que $v = 5$ km/h y $w = 4$ km/h.

Ejemplo 6.66 *Un escolar gastó cierta suma de dinero para comprar una cartera, un estilógrafo y un libro. Si la cartera, el estilógrafo y el libro costarán 5, 2 y 2,5 veces más baratos respectivamente, la compra costaría 8 dólares. Y si, en comparación con el precio original, la cartera costará 2 veces más barata, el estilógrafo 4 veces y el libro 3 veces más baratos, por la misma compra el escolar pagaría 12 dólares. ¿Cuánto vale la compra y por qué cosa se pagó más: por la cartera o por el estilógrafo?*

Solución

Sea x el precio de la cartera; el precio del estilógrafo y y z, el precio del libro. Hay que aclarar cuántos dólares pagó el escolar por la cartera, el estilógrafo y el libro en conjunto, es decir, hallar la suma $x+y+z$.

La primera ecuación se compone partiendo de la suposición de que la compra costaría 8 dólares:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=8$$

Análogamente se compone la segunda ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12$$

Es claro que no podremos determinar todas las incógnitas de este sistema obtenido de dos ecuaciones con tres incógnitas, pero podemos hallar su suma, que es lo que se exige en el problema. Para esto escribamos nuestras ecuaciones como:

$$\begin{cases} 2x+5y+4z=80 \\ 6x+3y+4z=144 \end{cases}$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se hallará la suma de las incógnitas: $x+y+z=28$. De esta menera se obtiene la respuesta a la primera pregunta del problema: toda la compra cuesta 28 dólares.

Ahora vamos a tratar de esclarecer qué es más costoso: la cartera o el estilógrafo; en otras palabras, tenemos que esclarecer cuál de las desigualdades tiene lugar: $x>y$ o $y>x$.

Si de la segunda ecuación del sistema restamos la primera, obtendremos que

$$2x-y=32.$$

Es evidente que $x>\frac{y}{2}$, porque en caso contrario tendríamos $32=2x-y<0$. Sin embargo, la desigualdad $x>\frac{y}{2}$ todavía no facilita la resolución del problema. Y no la facilita porque hemos usado mal la ecuasción. A saber: hemos utilizado solamente que la diferencia $2x-y$ es positiva. ahora trataremos de hacer uso del hecho de que ésta es igual a 32, tomando en consideración a la vez que $x+y+z=28$ y que todas las incógnitas son números positivos por su sentido real.

Escribamos la ecuación como: $x+(x-y)=32$. Ya que toda la compra cuesta 28 dólares, entonces es notorio que $x<28$, y de la última ecuación se deduce que $x-y>0$, es deecir, la cartera es más cara que el estilógrafo.

Ejemplo 6.67 *A las 9 a.m., del punto A hacia el punto C parte un tren rápido. En ese mismo instante, del punto B, situado entre los puntos A y C, salen dos trenes de pasajeros, el primero de éstos va al punto A y el segundo, al punto C; las velocidades de los trenes son iguales. El tren rápido encuentra al primer tren de pasajeros a no más tardar de las 3 horas después de su partida, luego pasa por el punto B a no más tardar de las 14 horas del mismo día, llegando por fin al punto C simultáneamente con el tren de pasajeros, 12 horas después del encuentro con el primer tren de pasajeros. Hallar la hora de llegada del primer tren de pasajeros al punto A.*

Solución

Sea v_1 km/h, la velocidad del tren rápido, v_2 km/h, la del de pasajeros, la distancia AB es igual a s km. De la condicición de que el tren rápido encuentra al primer tren de pasajeros no más tardar de las tres horas después de su partida, obtenemos que

$$\frac{s}{v_1+v_2} \leq 3.$$

De la condición de que el tren rápido pasó el punto B antes de las 5 horas después de su partida, tenemos

$$\frac{s}{v_1} \geq 5.$$

Ya que hasta el primer encuentro pasaron $\frac{s}{v_1+v_2}$ horas, entonces, durante el tiempo de $12+\frac{s}{v_1+v_2}$ horas el tren rápido alcanzará al segundo tren de pasajeros, por cuya razón resulta que

$$\left(12+\frac{s}{v_1+v_2}\right)(v_1-v_2)=s$$

Nos hace falta hallar $x=\frac{s}{v_2}$. De ahí $s=xv_2$; sustituyendo esta expresión en lugar de s en las igualdades y desigualdades precedentes y designando $\frac{v_1}{v_2}$ por α, llegamos al sistema

$$\begin{cases} x \leq 3(\alpha+1) \\ x \geq 5\alpha \\ x = 6(\alpha^2-1) \end{cases}$$

Muchos estudiantes no dominan este problema. En realidad, la resolución no es tan difícil: en este sistema hay que despejar sea x ó α y pasar al sistema de dos desigualdades respecto a una incógnita. Por cuanto es más fácil, a primera vista, eliminar x, emprendemos precisamente este camino. Sustituyendo x por $6(\alpha^2-1)$ en dos primeras desigualdades, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2\alpha^2-\alpha-3 \leq 0 \\ 6\alpha^2-5\alpha-6 \geq 0 \end{cases}$$

Las soluciones de la primera desigualdad son: $-1 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$; las soluciones de la segunda: $\alpha \geq \frac{3}{2}$ y $\alpha \leq -\frac{2}{3}$. De tal modo, la solución del sistema será: $\alpha=\frac{3}{2}$ y, además, todas las α dentro del intervalo $-1 \leq \alpha \leq -\frac{2}{3}$. Como estamos interesados por las α positivas, a la condición del problema le satisface el valor único $\alpha=\frac{3}{2}$. Ahora hallamos con facilidad que $x=\frac{15}{2}$ y obtenemos la solución: el primer tren de pasajeros llega al punto A a las 16 horas 30 minutos.
Este problema, así como otros de este tipo, admite una solución en la que todos los datos se escriben en forma de ecuaciones. Esto se hace introduciendo incógnitas complementarias y obteniendo un sistema de ecuaciones, en las cuales el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Sin embargo, la solución de tal sistema de ecuaciones es más difícil que la del sistema de desigualdades.
Resolvamos este problema recurriendo al segundo procedimiento. Conservemos las mismas designaciones. Que el tren rápido encuentre al primer tren de pasajeros después de $3-t_1$ horas ($t_1 \geq 0$), recorre el punto B después de $5+t_2$ horas ($t_2 \geq 0$) y alcanza al segundo tren de pasajeros después de $(3-t_1)+12$ horas. En este caso, las ecuaciones se componen fácilmente

$$\begin{cases} (v_1+v_2)(3-t_1)=s \\ v_1(5+t_2)=s \\ (15-t_1)(v_1-v_2)=s \\ xv_2=s \end{cases}$$

Si eliminamos s de este sistema y designamos $\frac{v_1}{v_2}$ por α obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (\alpha+1)(3-t_1) = x \\ \alpha(5+t_2) = x \\ (\alpha-1)(15-t_1) = x \end{cases} \tag{6.8}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas de las cuales hay que hallar sólo x. Vamos a proceder así como lo hicimos antes: eliminamos x obteniendo un sistema

$$\begin{cases} \alpha t_2 + (\alpha+1)t_1 = 3 - 2\alpha \\ (1-\alpha)t_1 - \alpha t_2 = 15 - 10\alpha \end{cases} \tag{6.9}$$

Al notar ahora que el segundo miembro de la segunda ecuación es 5 veces mayor que el segundo miembro de la primera, multiplicamos la primera por 5 y, al restar de ésta la segunda, obtendremos

$$6\alpha t_2 + (6\alpha + 4)t_1 = 0. \tag{6.10}$$

Por cuanto $\alpha > 0$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, esta igualdad sólo es posible cuando $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$. Pero, entonces (7) se halla fácilmente que $\alpha = \frac{3}{2}$, y de (6), $x = \frac{15}{2}$ resultando la misma solución.

Ejemplo 6.68 *A las 9 a.m., de la ciudad A partió un ciclista a una velocidad constante de 12 km/h. Dos horas después, siguiendo al primero, partió de la mismas ciudad un motociclista que iba desplazándose con un movimiento uniformemente retardado a una velocidad inicial de 22 km/h, de modo que su velocidad disminuia en 2 km/h. Un automovilista que iba al encuentro a ellos, a la ciudad A, con una velocidad constante de 50 km/h, encontró primeramente al motociclista y luego, al ciclista. ¿Llegará el automovilista a las 19 horas de este día a la ciudad A?*

Solución

Este problema puede ser resuelto también mediante la composición de ecuaciones y desigualdades. No obstante, la composición de tal sistema exigiría largos razonamientos. Por esto, es mejor resolverlo no por composición formal del sistema de ecuaciones y desigualdades, sino por un simple razonamiento.

De la condición del problema se infiere que al principio el motociclista alcanza al ciclista, y luego el ciclista alcanzará al motociclista. Supongamos que el ciclista demore, hasta el encuentro (no importa, el primero o el segundo), t horas, mientras que el motociclista demore $t-2$ horas para el mismo camino. Ya que hasta el encuentro ambos pasarán un camino igual, entonces, igualando sus caminos hasta el encuentro, obtendremos que

$$12t = 22(t-2) - 2 \cdot \frac{(t-2)^2}{2}.$$

Una vez resuelta esta ecuación, obtenemos que hasta el primer encuentro el ciclista demoró 6 horas, es decir, recorrió 72 km, y hasta el segundo pasó 96 km en 8 horas. Según la condición del problema, el automovilista encontró al ciclista antes de haber pasado éste 96 km. Por eso, el automovilista ha de ir hasta el punto A menos de 96 km. Demorará menos de $frac9650$ horas para recorrer este camino. Ya que el ciclista demorará menos de 8 horas para encontrarse con el automovilista, entonces el encuentro tendrá lugar antes de las 17 horas. Es decir, después del encuentro con el ciclista quedan más de 2 horas para que el automovilista llegue al punto para las 19 horas. Pero, para superar este camino se necesita menos de $\frac{96}{50}$ horas, es decir, menos de 2 horas. Por lo tanto, el automovilista llegará al punto A antes de 19 horas.

Con frecuencia se proponen problemas en los cuales se exige hallar una solución óptima relacionada, por ejemplo, con una suma de dinero que se entrega para la compra de una cantidad mayor de piezas, o de unas cuantas variantes posibles de transporte de cargas escoger aquella que sea más barata que las demás, etc.

Las resoluciones de los problemas de esta índole pueden consistir en componer sistemas de ecuaciones y desigualdades y en resolverlos. sin embargo, los elementos más necesarios para resolver estos problemas son los razonamientos que ayudan mucho para elegir la mejor variante.

Ejemplo 6.69 *Se requiere edificar cierto número de casas de vivienda iguales de un área útil de 40 mil m^2. Los gastos para la construcción de una casa de N m^2 de área habitable se componen del costo de la superestructura, proporcional a $N\sqrt{N}$, y del costo de los cimientos, proporcional a $\sqrt{N}$. La edificación de una casa de 1600 m^2 cuesta 176,8 mil dólares con que, en este caso el costo de la superestructura constituye un 36 % del costo de los cimientos. Determinar qué cantidad de casas hay que construir para que la suma de gastos sea mínima y hallar esta suma.*

Solución

Supongamos que se decidió construir n casas iguales, cada una de las cuales tiene y m^2 de área habitable. Entonces es válida la igualdad $yn = 40000$. Sea z mil dólares el costo de una casa de y m^2 de área habitable; entonces el costo x de toda la obra se calcula por la igualdad $x = zn$.

El costo de la casa se integra por el costo v de la superestructura de la casa y por el costo w de los cimientos, es decir, $z = v + w$. Según la condición del problema, el costo de la superestructura de la casa de y m^2 es proporcional a $y\sqrt{y}$, es decir, $v = \alpha y\sqrt{y}$, donde α es un coeficiente. Análogamente $w = \beta\sqrt{y}$, donde β es también un coeficiente adecuado.

En particular, al construir la casa de 1600 m^2, teniendo en cuenta que el costo de la superestructura constituye el 36 % del costo de los cimientos, obtenemos que

$$\alpha \cdot 1600 \cdot \sqrt{1600} = \frac{36}{100} \cdot (\beta \cdot 1600)$$

y tomando en consideración que la edificación de la casa de 1600 m^2 cuesta 176,8 mil dólares, tenemos que

$$176,8 = \alpha \cdot 1600\sqrt{1600} + \beta\sqrt{1600}.$$

Tenemos escrito todos los datos del problema; ahora hay que determinar x, como función de n, de las ecuaciones obtenidas y luego hallar para cuál valor de n será mínima la x.

Partiendo de las dos últimas igualdades se hallan fácilmente α y β: $\alpha = \frac{117}{160000}$, $\beta = \frac{13}{4}$. Poniendo v y w en la expresión para z, obtenemos que

$$z = \frac{117}{160000} y\sqrt{y} + \frac{13}{4}\sqrt{y}.$$

Ahora, al permutar este valor de z y el valor de $y = \frac{40000}{n}$ de la primera igualdad a la segunda, obtenemos que

$$x = 650\left(\frac{9}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right).$$

De tal manera hemos llegado a la conclusión de que x es el costo de la construcción y la función n recién escrita es la cantidad de casas. Ahora tenemos que determinar el valor mínimo de x. Si aplicamos al segundo miembro de esta igualdad la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, obtenemos que

$$x \geq 2 \cdot 650\sqrt{9} = 3900.$$

donde el signo de igualdad se logra sólo cuando $\frac{8}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, es decir, para $n = 9$. En otras palabras, el costo de la obra completa será siempre no menor que 3,9 millones de dólares y exactamente igual a este número si n = 9.

Por eso, al construir las casas, la suma mínima de gastos será cuando se construyan 9 casas; la construcción de estas 9 casas costará 3,9 millones de dólares.

Ejemplo 6.70 *Se decició comprar por 100 dólares una cantidad de juguetes para el árbol de Navidad. Estos adornos se venden por surtidos. El surtido de 20 juguetes cuesta 4 dólares, el de 35 juguetes, 6 dólares; y el surtido compuesto por 50 juguetes, 9 dólares. ¿Cuántos y cuáles surtidos hay que comprar para que resulte la cantidad máxima de juguetes?*

Solución

Sean$x$, y, z el número de surtidos de la primera, segunda y tercera especie, respectivamente, para que la compra de éstos asegure la máxima cantidad de juguetes (tal resolución del problema se considera, por lo común, como óptima). Entonc es

$$4x + 6y + 9z = 100.$$

Esta es la única ecuación que puede ser compuesta según la condición del problema. Sin embargo, es conocido, además de esto, que x, y y z son números enteros no negativos y que la cantidad de juguetes de esta compra es mayor que la de cualquier otra. Resulta que estas condiciones son totalmente suficientes para la determinación unívoca de todas las incógnitas.

Esta es la única ecuación que puede ser compuesta según la condición del problema. Sin embargo, es conocido, además de esto, que x, y y z son números enteros no negativos y que la cantidad de juguetes de esta compra es mayor que la de cualquier otra. Resulta que estas condiciones son totalmente suficientes para la determinación unívoca de todas las incógnitas.

La primera idea que puede ocurrirse, es decir, resolver la ecuación dada atacando de frente por selección de todos los valores posibles de incógnitas, no tiene, evidentemente, perspectivas por razón de una enorme cantidad de casos. Sin embargo, esta selección puede redicirse considerablemente con ayuda de razonamientos económicos. En efecto por 12 dólares pueden comprarse 3 surtidos de la primera especie ó 2 surtidos de la segunda especie; en el primer caso adquirimos 60 juguetes, y en el segundo, 70. Por lo tanto, es evidente que el número de surtidos de la primera especie, en cuanto a la solución óptima, no debe superar a 2. Comparando análogamente los surtidos de la segunda y tercera especies, obtenemos que en la resolución óptima no debe ser más que un solo surtido de la tercera especie. De tal modo, hemos obtenido las desigualdades $x \leq 2$, $z \leq 1$.

Ahora la selección no presenta dificultades. Con $x = 0$ obtenemos, para determinar y y z, una ecuación $6y + 9z = 100$ que no tiene soluciones, porque su primer miembro se divide entre 3 y el segundo no se divide. Luego, para $x = 1$, obtenemos una ecuación $2y + 3z = 32$ la que (teniendo en cuenta la desigualdad $z \leq 1$) tiene la solución única $y = 16$, $z = 0$. En fin, para $x = 2$, así como para $x = 0$, la ecuación tampoco tiene soluciones.

6.16. Tarea

1. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - x = 2 \\ 10x + y = 3xy \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 72 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{16}{15} \\ x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = A \\ \sqrt{xy} = B \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x + xy + y = 27 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ xy = 12 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 13 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$

l) $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18 \\ x + y = 12 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \\ \frac{A}{x} + \frac{B}{y} = 4 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ xy = -21 \end{cases}$

o) $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

r) $\begin{cases} xy = 5 \\ 2y - x - 3 + 0 \end{cases}$

s) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10 \end{cases}$

t) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

u) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \\ x + y = 20 \end{cases}$

v) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

2. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 61 \\ x + xy + y = 29 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ (x+2)(y-1) = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 133 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 4x - 5y - 8 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2(x+y)^2 + x^2y + xy^2 + 30 = 0 \\ x + xy + y = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^2 - y + 3x - 5 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 62 = 0 \\ x^2 - y^2 + x - y - 50 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 - 27xy = 0 \\ (x^2+1)(y^2+1) - 10xy = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 - 133 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 - 16 = 0 \\ 2x^2 - 3xy - y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y - 6 = 0 \\ xy + 4x + 4y = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 - 45 = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2} \\ xy - x - y - 9 = 0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{7}{\sqrt{xy}} = 1 \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} - 78 = 0 \end{cases}$

3. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} xy - 6 = \frac{y^3}{x} \\ xy + 24 = \frac{x^3}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^3y + 2xy^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 23 \\ 3y^2 - 8x = 59 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 5x^2 + 14y = 19 \\ 7y^2 + 10x = 17 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^2(x+y) = 80 \\ x^2(2x-3y) = 80 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 9 \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y = 1 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + x - 2y = -2 \\ 3xy - 5y^2 + 3x - 6y = -5 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x - y = 0,25xy \\ x^2 + y^2 = 2,5xy \end{cases}$

s) $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2 \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7 \end{cases}$

t) $\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 3 \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 = 20 \end{cases}$

u) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

v) $\begin{cases} (x+y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x-y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases}$

w) $\begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2,5 - y \\ 6(x-y)^2 + x = 0,125 + y \end{cases}$

x) $\begin{cases} y^2(x^2-3) + xy + 1 = 0 \\ y^2(3x^2-6) + xy + 2 = 0 \end{cases}$

y) $\begin{cases} \frac{3}{x^2+y^2-1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22 \end{cases}$

z) $\begin{cases} 6x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

4. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 56x^2 - xy - y^2 = 0 \\ 14x^2 + 19xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy - y^2 = 0 \\ 32x^2 - 36xy + 9y^2 = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 7x^2 - 4xy - 3y^2 = -32 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x-y) \\ x^3 + y^3 = 7(x+y) \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15 \\ x^3y - xy^3 = 6 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136 \\ x^3y + xy^3 = 30 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x-y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x-y) \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = 5(x+y) \\ 5x^2 - xy - y^2 = 7(x+y) \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 19 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x+8)(x+y) = 2 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

p) $\begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4} \end{cases}$

q) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$

5. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^3}{y}} - \sqrt{\frac{y^3}{x}} = \frac{65}{6} \\ x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2 - 2x + 3} = \frac{2}{3}x + 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5\sqrt[3]{x-2y} + 3\sqrt[3]{x+y} = 13 \\ 3\sqrt[3]{x-2y} - 4\sqrt[3]{x+y} = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x+y}}{y} + \frac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x} = \frac{81}{182} \\ \frac{\sqrt[3]{2x-y}}{y} - \frac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x} = \frac{1}{182} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11} - \sqrt{3x+y-9} = 3 \\ \sqrt[4]{2x-y+11} + \sqrt[4]{3x+y-9} = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6 \\ \sqrt[8]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3} \\ xy = 9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$

k) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ xy = 8 \end{cases}$

l) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80 \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 5 \end{cases}$

n) $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\frac{x}{y+1}} = 1 \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases}$

q) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

r) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 \end{cases}$

6. Resuelva los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} (x-1)(y+5) = 14 \\ (y+5)(z+8) = 63 \\ (z+8)(x-1) = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 48 \\ xy + y^2 + yz = 12 \\ xz + yz + z^2 = 84 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 19 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91 \\ y^2 - xz = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 25 \\ xy + y^2 + yz = 32 \\ xz + yz + z^2 = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x+y)^2 - z^2 = 65 \\ x^2 - (y+z)^2 = 13 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 6 \\ 2(xy + yz) - xz = 13 \end{cases}$

g) $\begin{cases} xy + 2x + y = 24 \\ yz + 3y + 2z = 15 \\ xz + x + 3z = 9 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x - 2y - 7 = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 8x - y^2 - 3z^2 + 4 = 0 \end{cases}$

7. Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{yz} = 9 \\ \sqrt{yz} + \sqrt{xz} = 5 \\ \sqrt{xz} + \sqrt{xy} = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3 \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} = 5 \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{x+y} = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6 \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12 \\ x+y+z=14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{4x+y-3z+7}=2 \\ \sqrt[3]{2y+5x+z+25,5}=3 \\ \sqrt{y+z}-\sqrt{6x}=0 \end{cases}$

8. La suma de las circunferencias de dos círculos es 88 centímetros y la suma de sus áreas es $\dfrac{2200}{7}$ centímetros cuadrados, haciendo $\pi \approx \dfrac{22}{7}$. Hallar los radios de los círculos.

9. Se organiza un ágape que cuesta \$30 y resulta que si se agregan tres más al grupo el costo por persona se reduciría en 50 céntimos. ¿Cuántos son los invitados originalmente?

10. Dos números difieren en 2 y sus cuadrados en 48. Hallarlos.

11. Un camión sale de A a las 05:00 horas en viaje hacia B distante 300 kilómetros. A las 06:00 horas un auto parte de A, pasa al camión, entrega un paquete y vuelve a A. Si el auto hizo una media de 60 kilómetros por hora y alcanzó a llegar a A $2\frac{1}{2}$ horas antes que el camión llegara a B, hallar la velocidad media del camión y averiguar a qué distancia de A pasó el auto al camión.

12. La suma de los cuadrados de las cifras de un número de dos cifras es igual a 10. si del número buscado sustraemos 18, obtenemos un número escrito con esas mismas cifras, pero en orden inverso. Hallar el número buscado.
Resp: 31.

13. ¿Qué número de dos cifras es 4 veces mayor que la suma de sus cifras y 3 veces mayor que el producto de ellas?
Resp: 24.

14. Hallar dos números enteros, cuya suma es igual a 1244. Si al primer número se escribe a la derecha la cifra 3 y del segundo se elimina la última cifra 2, los números obtenidos serán iguales.
Resp: 12 y 1232.

15. Un número de tres cifras termina con la cifra 3. Si ésta se traspasa al comienzo del número, el nuevo será mayor en 1 que el número inicial triplicado. Hallar el número inicial.
Resp: 103.

16. Un número de seis cifras comienza por la cifra 2. Si traspasamos ésta del primer puesto al último, conservando el orden de las demás, el número obtenido será tres veces mayor que el inicial. Hallar éste.

Resp: 285714.

17. La suma de todos los números pares fue dividida sin resto por uno de ellos. Hallar el divisor si sabemos que la suma de sus cifras es igual a 9 y que el cociente se diferencia del divisor sólo por el orden de las cifras.
Resp: 54.

18. Si dividimos un número de dos cifras por la suma de éstas, en el cociente obtendremos 7 y en el resto 6. Si ese mismo número de dos cifras se divide por el producto de sus cifras, en el cociente obtendremos 3 y en el resto, un número igual a la suma del número inicial. Hallar el número inicial de dos cifras.
Resp: 83.

19. La suma de dos números de tres cifras, escritos con cifras iguales, pero en orden inverso, es igual a 1252. Hallar dichos números si la suma de sus cifras es igual a 14 y la suma de los cusdrados de ellas es 84.
Resp: 428 y 824.

20. Un turista que sube a una montaña alcanzó en el transcurso de la primera hora la altura de 800 metros, mientras que durante cada siguiente hora subió a una altura de 25 metros menor que en la anterior. ¿Cuántas horas pasarán hasta alcanzar la altura de 5700 metros?
Resp: En 8 horas.

21. Al dividir el noveno término de una progresión aritmética por su segundo término, en el cociente se obtiene 5, mientras que al dividir el término décimotercero de la progresión por su sexto término en el cociente tendremos 2 y en el resto 5. Hallar la suma de 20 miembros de la progresión.
Resp: 820.

22. La suma de una progresión geométrica inifinitamente decreciente es igual a 4, en tanto que la suma de los cubos de sus términos, igual a 102. Hallar el primer término y la razón de la progresión.
Resp: $6, -\dfrac{1}{2}$.

23. Hallar cuatro números de los que los primeros tres forman una progresión aritmética y los tres últimos, una geométrica; la suma de los números extremos es igual a 60 y la de los medios, 60.
Resp: 12; 24; 30; 54 ó 52,5; 37,5; 22,5; 13,5.

24. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es igual a 91. Si a estos términos adicionamos 25, 27 y 1, respectivamente, obtenemos tres números que forman una progresión aritmética. Hallar el séptimo término de la progresión geométrica.
Resp: 5103 ó $\frac{7}{81}$.

25. Hallar un número de tres cifras, en el cual las cifras forman una progresión geométrica. Si de este número sustraemos 792, obtenemos un número escrito con esas mismas cifras, pero en orden contrario. Si de la cifra que expresa el número de centenas, sustraemos 4 y si dejamos las restantes cifras del número buscado sin variar, hallamos un número, cuyas cifras componen una progresión aritmética.
Resp: 931.

26. Hallar un número de cuatro cifras, en el que las tres primeras forman una progresión aritmética creciente, si sabemos que él se divide por 225.
Resp: 1350.

27. Tres hermanos, cuyas edades forman una progresión geométrica, dividen entre sí cierta suma de dinero de modo proporcional a la edad. Si esa misma suma de dinero la dividieran proporcionalmente a su edad tres años más adelante, el menor de los hermanos recibiría 105 dólares más, el mediano, 15 dólares más que ahora. ¿Cuál es la edad de los hermanos si sabemos que la diferencia de años entre el mayor y el menor de ellos es igual a 15 años?
Resp: 12, 18, 27.

28. Hallar el número de términos de una progresión aritmética, en la que la razón entre la suma de los 13 primeros términos y la de los 13 últimos es igual a $\frac{1}{2}$, en tanto que la razón entre la suma de todos los términos sin los tres primeros y la de todos los términos sin los 3 últimos es igual a $\frac{4}{3}$.
Resp: 20.

29. La suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente es igual a $\frac{16}{3}$. La progresión contiene un término igual a $\frac{1}{6}$. La razón entre la suma de todos los términos de la progresión, que preceden al que es igual a $\frac{1}{6}$, y la suma de los términos que le siguen, es igual a 30. Determine el número del término igual a $\frac{1}{6}$.
Resp: 5.

30. Una aleación pesa 2 kilogramos y consta de plata y cobre, con la particularidad de que la masa de la plata constituye el $14\frac{2}{7}$ % de la masa del cobre. ¿Qué cantidad de plata hay en la aleación?
Resp: 0,25 kilogramos.

31. Se ha comprado 1 metro de tejidos de dos calidades por una suma de 15 dólares y 20 centavos. Si el precio del tejido de la primera calidad fuera más alto y de la segunda, más bajo en un mismo por ciento, 1 metro del tejido de la primera calidad costaría 15 dólares y de la segunda, 2 dólares y 40 centavos. ¿Cuánto cuesta 1 metro del tejido de primera calidad?
Resp: 12 dólares ó 9,5 dólares.

32. Un número dígito fue aumentado en 10. Si el número obtenido se aumentara al mismo por ciento que la primera vez, obtendríamos 72. Hallar el número dígito inicial.
Resp: 2.

33. De acuerdo con el plan, dos fábricas deberían producir 360 máquinas - herramientas al mes. La primera de ellas cumplió el plan en el 112 %, la segunda en el 110 % y en conjunto, las dos fábricas produjeron 400 máquinas - herramientas. ¿Cuántas máquinas produjo cada fábrica por separado superando el plan?
Resp: 24 y 16.

34. Para producir pan de trigo se han tomado tantos kilogramos de harina, como el por ciento que constituye el aumento de peso de dicha harina. Para producir pan de centeno se han tomado 10 kilogramos de harina más y, precisamente, tantos kilogramos como el por ciento que constituye el aumento de peso de la harina de centeno. ¿Qué cantidad de harina de uno y otro tipo se ha tomado si en total se han producido 112,5 kilogramos de pan?
Resp: 35 kilogramos de harina de trigo y 45 kilogramos de cebada.

35. ¿Si disminuyera el día laboral de 8 a 7 horas, en qué por ciento hay que aumentar el rendimiento del trabajo para que con las mismas tarifas el sueldo aumente el 5 %?
Resp: El 20 %.

36. A principios de año en la cartilla de ahorros fueron puestos 1600 dólares y a finales de él, saca 848 dólares. A finales del segundo año en la cartilla había 824 dólares. ¿Qué interés pone en cuenta al año la cooperativa?
Resp: El 30 %.

37. A fines de año en la cartilla de ahorros del depositante una cooperativa puso en cuenta el interés, lo que constituyó 6 dólares. El depositante añadió 44 dólares y dejó su dinero en la cooperativa para un año más. Al acabar el año, de nuevo pusieron en cuenta los intereses, y, ahora, el depósito, junto con los intereses, constituía 257 dólares y 50 centavos. ¿Qué suma fue depositada en la cuenta de ahorros inicialmente?
Resp: 200 dólares.

38. El precio del artículo fue rebajado el 20 %, a continuación, el nuevo precio lo rebajaron el 15 %; por fin, después del recálculo se efectuó la rebaja al 10 % más. ¿A qué por ciento total fue rebajado el precio inicial?
Resp: El 38, 8 %.

39. La cantidad de estudiantes en un centro de enseñanza, aumentando el mismo por ciento anualmente, creció en tres años de 5000 a 6655 personas. ¿En qué tanto por ciento aumentó anualmente el número de estudiantes?
Resp: El 10 %.

40. El volumen de la sustancia A constituye la mitad de la suma de los volúmenes de las sustancias B y C, en tanto que el volumen de la sustancia B, el 20 % de la suma de los

volúmenes de las sustancias A y C. Hallar la razón entre el volumen de la sustancia C y la suma de los volúmenes de las sustancias A y B.
Resp: 1.

41. Como resultado de la reconstrucción de un taller el número de obreros que quedaron libres puede encontrarse en los límites del 1,7 al 2,3 %. Hallar el número mínimo de obreros que puede estar ocupado en el taller antes de la reconstrucción.
Resp: 44 personas.

42. El por ciento de estudiantes del curso que han dado todos los exámenes preliminares se halla en los límites del 96,8 al 97,2 %. Hallar el número mínimo de estudiantes que puede haber en dicho curso.
Resp: 32 personas.

43. Un turista tiene que cubrir la distancia desde el pueblo hasta la estación de ferrocarril. Después de pasar 3 kilómetros él comprendió que llegaba tarde al tren y empezó a andar a una velocidad de 4 km/h. El turista llegó a la estación 45 minutos antes de la partida del tren. Si él hubiera ido a la velocidad inicial se habría demorado 40 minutos. determine la distancia desde el pueblo hasta la estación.
Resp: 20 kilómetros.

44. Un pasajero que viaja en un tren a una velocidad de 40 km/h observó por la ventana que en sentido opuesto, en el transcurso de 3 segundos, pasó un tren de 75 metros de longitud. ¿Cuál era la velocidad del tren que iba en dirección contraria?
Resp: 50 km/h.

45. Un ciclista debería cubrir 48 kilómetros a velocidad media determinada. Pero por ciertas causas, la primera mitad del recorrido se desplazó a una velocidad el 20 % menor, mientras que la segunda, a 2 kilómetros mayor que la necesaria. Para cubrir todo el recorrido el ciclista gastó 5 horas. Haalar la velocidad que al principio se preveía.
Resp: 10 km/h.

46. Tras cuerpos se mueven por una recta del punto A al B. El segundo cuerpo comenzó a desplazarse 5 segundos y el tercero, 8 segundos después que el primero. La velocidad del primer cuerpo es 6 cm/seg menor que la del segundo. La velocidad del tercero es igual a 30 cm/seg. Hallar la distancia AB y la velocidad del primer cuerpo si sabemos que los tres cuerpos llegan al punto B en el mismo momento.
Resp: 360 cm y 18 cm/seg ó 60 cm y 6 cm/seg.

47. Al principio el avión volaba a la velocidad de 220 km/h. Cuando le quedaban por volar 385 kilómetros menos que los ya cubiertos, la velocidad aumenta hasta 330 km/h. En el transcurso de todo el recorrido la velocidad media del avión era igual a 250 km/h. ¿Qué distancia voló el avión?
Resp: 1375 kilómetros.

48. De los puntos A y B salieron al encuentro, simultáneamente, dos trenes. La velocidad del primer tren es 10 km/h mayor que la del segundo. Los trenes se encontraron a 28 kilómetros de la mitad del recorrido AB. Si el primer tren hubiera partido de A 45 minutos más tarde que el segundo. Los trenes se encontrarían en la mitad del recorrido AB. Hallar la distancia AB y las velocidades de ambos trenes.
Resp: 840 km/h, 80 km/h y 70 km/h.

49. Dos escolares salieron al mismo tiempo de casa a igual velocidad. Uno de ellos, 3 minutos después se acordó de que había dejado en casa un libro que necesitaba y retornó a casa a una velocidad de 60 mt/min mayor que la inicial. Después de coger el libro comenzó de nuevo su camino a la misma velocidad y alcanzó a su compañero, que iba a velocidad constante, ya junto a la puerta de la escuela. Hallar las velocidades de los escolares si la distancia entre la escuela y la casa es 280 metros.
Resp: 40 mt/min.

50. Dos transeúntes que se hallan en los puntos A y B, entre los que hay una distancia de 27 kilómetros en línea recta, salen de ellos simultáneamente, desplazándose por la recta AB. Ellos se encuentran después de 3 horas si van al encuentro y uno alcanza al otro 9 horas después, si se mueven en una misma dirección. Hallar la velocidad de cada uno de los transeúntes.
Resp: 6 km/h y 3 km/h.

51. Por los dos lados de un ángulo recto, se mueven dos cuerpos en dirección de su vértice. En el momento inicial el cuerpo A estaba distanciado del vértice del ángulo recto a 60 metros, el cuerpo B, a 80 metros. Pasados 3 segundos la distancia entre A y B se hizo igual a 70 metros y después de 2 segundos más, 50 metros. Hallar la velocidad de cada uno de los cuerpos.
Resp: 6 mt/seg y 8 mt/seg.

52. Por el río, la distancia entre dos ciudades es igual a 80 kilómetros. Una lancha pasa esta distancia dos veces (hacia arriba y abajo) en el transcurso de 8 horas 20 minutos. Determine la velocidad de la lancha en agua estancada si la velocidad de la corriente del río es igual a 4 km/h.
Resp: 20 km/h.

53. Una lancha se desplazó por un río aguas arriba 8 kilómetros, dio la vuelta y se desplazó aguas abajo 36 kilómetros. Todo el viaje duró 2 horas. Después, la lancha cubrió 6 kilómetros contra corriente y a favor de ella, 33 kilómetros, gastando en el segundo viaje 1 hora 45 minutos. Hallar la velocidad de la lancha en agua estancada.
Resp: 20 km/h.

54. En un lago desembocan dos ríos. Una lancha parte del muelle A, situado en el primer río, se desplaza 24 kilómetros hacia abajo, hasta el lago después baja 2 kilómetros por el lago, y, a continuación, 32 kilómetros por el segundo río hasta el muelle B, cubriendo la distancia desde A hasta B en 8 horas. Si la lancha hubiera navegado por el lago 18 kilómetros más, todo el recorrido de A a B consumiría 10 horas. Hallar la velocidad de la corriente de cada río si sabemos que la velocidad del primer río es 2 km/h mayor que la del segundo.

Resp: 3 km/h y 1 km/h.

55. Dos peatones salieron, simultáneamente, al encuentro de los puntos A y B. Cuando el primero pasó la mitad del camino, al segundo, hasta el final del recorrido, le quedaban 24 kilómetros. Cuando el segundo cubrió la mitad del recorrido, al primero le quedaban 15 kilómetros más hasta el final. ¿Cuántos kilómetros ha de recorrer el segundo peatón hasta A después de que el primero cubre el camino desde A hasta B.
Resp: 8 kilómetros.

56. De los puntos A y B salen al encuentro dos trenes, con la particularidad de que el segundo partió media hora después que el primero. Al pasar 2 horas después de la partida del primer tren, la distancia entre ellos constituía $\dfrac{19}{30}$ de la distancia entre A y B. Los trenes se encontraron en la mitad del camino desde A hasta B. ¿Cuánto tiempo necesitará cada tren para cubrir todo el recorrido AB?
Resp: 10 horas y 9 horas.

57. La distancia entre las ciudades A y B es igual a 60 km/h. Dos trenes parten simultáneamente, uno de A a B y otro de B a A. Pasados 20 kilómetros el tren que va de A a B se detiene media hora y, a continuación, desplazándose 4 minutos, se encuentra con el tren que viene de B. Los dos trenes llegan al mismo tiempo al punto de destino. Hallar las velocidades de los trenes.
Resp: 60 km/h y 40 km/h.

58. Dos ciclistas salieron al mismo tiempo de los puntos A y B al encuentro uno de otro. El ciclista que se desplazaba del punto A llegó a B pasadas 4 horas, en tanto que el que iba del punto B, llegó a A 9 horas después del encuentro con el otro. ¿Cuántas horas estuvieron cada uno de los ciclistas en el camino?
Resp: 15 horas y 10 horas.

59. Tres ciclistas, al arrancar simultáneamente de un punto y en la misma dirección, van por un velódromo circular de 1 kilómetros de longitud. Un tiempo después el segundo alcanza al primero al recorrer un círculo más que éste. Pasados 4 minutos, al mismo punto llega el tercero, al recorrer una distancia igual a la superada por el primero para el momento de encuentro con el segundo. Las velocidades de los ciclistas forman en cierta sucesión una progresión aritmética con una diferencia de 5 km/h. Hallar estas velocidades.
Resp: 20 km/h, 25 km/h, 15 km/h.

60. Tres hermanos cuyas edades forman una progresión geométrica, reparten entre sí cierta suma de dinero directamente proporcional a sus edades. Si lo hicieran dentro de tres años, cuando el menor sea dos veces más joven que el mayor, entonces el menor obtendría en 105 y el mediano en 15 dólares más que ahora. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hermanos?
Resp: 27, 18 y 12 años.

61. Dos grupos de turistas partieron a la vez del punto A hacia el punto B. El primer grupo salió en un autobús a una velocidad de 20 km/h y llegó en éste hasta el punto C que se

encuentra en el centro entre los puntos A y B, y siguió a pie. El segundo grupo al principio iba caminando pero después de una hora subió a un vehículo de paso que iba a una velocidad de 30 km/h, y llegó en éste al punto B. El primer grupo atravesó el punto C, 35 minutos antes que el segundo grupo, y llegó al punto B en 1 hora 25 minutos más tarde que el segundo. ¿Qué distancia hay desde el punto A hasta el punto B, si la velocidad (caminando) del primer grupo es en 1 km/h mayor que la velocidad del segundo grupo?
Resp: 30 kilómetros.

62. Dos recipientes iguales están llenos de alcohol. Del primer recipiente se extrayeron a litros de alcohol y se llenó la misma cantidad de litros de agua. Seguidamente, de la mezcla obtenida de alcohol y agua se extrayeron a litros y se repuso la misma cantidad de litros de agua. Del segundo recipiente se vertieron $2a$ litros de alcohol y se llenó con la misma cantidad de litros de agua. Luego, de la mezcla obtenida de alcohol y agua se extrajeron $2a$ litros y se repuso la misma cantidad de litros de agua. Determinar qué parte del volumen del recipiente constituyen a litros si la fuerza de la mezcla definitiva en el primer recipiente es $\dfrac{25}{16}$ veces mayor que la fuerza de la mezcla definitiva en el segundo recipiente. (Llámase fuerza de la mezcla la relación del volumen del alcohol puro en la mezcla a todo el volumen de la mezcla. Se supone que el volumen de la mezcla es igual a la suma de volúmenes de sus partes componentes).
Resp: 1/6.

63. Dos cuerpos están en movimiento uniforme por una circunferencia en el mismo sentido. Uno de ellos alcanza al otro cada 46 segundos. Si estos cuerpos se mueven a las mismas velocidades en direcciones contrarias, se encuentran entonces cada 8 segundos. Determínense las velocidades de movimiento de los cuerpos por la circunferencia sabiendo que su radio es igual a 184 centímetros.
Resp: 19π cm/s y 27π cm/s.

64. Las ciudades A y B están situadas a orillas de un río; la ciudad B se halla aguas abajo. A las 9 a.m., de la ciudad A hacia la ciudad B zarpó una balsa con la velocidad de la corriente del río con respecto a las orillas. Al mismo tiempo, de la ciudad B hacia la ciudad A parte un bote que se encuentra con la balsa después de 5 horas. Al llegar a la ciudad A, el bote retornó de instante y arribó a la ciudad B simultáneamente con la balsa. ¿Si el bote y la balsa tenían tiempo de llegar a la ciudad B a las 9 p.m. (del mismo día)?
Resp: No llegarán.

65. Cada uno de tres obreros necesita un tiempo para realizar cierto trabajo; el tercer obrero lo realiza en una hora más rápido que el primero. Obrando juntos, realizarán el trabajo en una hora. Y si el primer obrero trabaja durante una hora y después va a trabajar las 4 horas el segundo obrero, los dos realizarán todo el trabajo. ¿En cuántas horas puede cumplir todo el trabajo cada uno de los obreros?
Resp: 3 horas, 6 horas, 2 horas.

66. Hay dos soluciones de una misma sal en agua. Para obtener una mezcla que contenga 10 gramos de sal y 90 gramos de agua, se toman dos partes de la primera solución y una de la segunda. Después de una semana, de cada kilogramo de la primera y la segunda soluciones se

evaporó 200 gramos de agua y para que resulte la misma mezcla se necesitan cuatro partes de la primera solución y una de la segunda. ¿Cuántos gramos de sal contenian en inicio 100 gramos de cada solución?

Resp: 5 gramos y 20 gramos.

67. Un tren de carga que salió de A hacia B llegó a la estación C simultáneamente con un tren de pasajeros que iba desde B hacia A a una velocidad m veces mayor que la del tren de carga. Ambos trenes, después de permanecer t horas en la estación C, siguieron su camino aumentando cada uno de ellos su velocidad en un 25 % en comparación con su velocidad inicial (es decir, con la velocidad que tenían antes de la llegada a C). En estas condiciones el tren de carga llegó a B en t_1 horas más tarde y el de pasajeros llegó a A en t_2 horas más tarde, en caso de que ellos se movieran sin parar y a velocidades iniciales. ¿Con cuántas horas de anterioridad salió el tren de carga de A respecto del de pasajeros que partió de B?

Resp: En $5m(t-t_2) - 5m^{-1}(t-t_1)$.

68. A, B y C son tres puntos unidos por caminos rectilíneos. Con el segmento del camino AB linda un campo cuadrado que tiene un lado igual a $\frac{1}{2}AB$; el segmento del camino BC es contiguo a un lote cuadrado de un lado igual a BC; al segmento de camino CA es adyacente un bosque de forma rectangular cuya longitud es igual a AC y anchura de 4 km. El área del bosque es en 20 km^2 mayor que la suma de las áreas de los campos cuadrados. Hallar el área del bosque.

Resp: El área del bosque es 40 km^2.

69. Un grupo de estudiantes compuesto de 30 personas en un exámen recibió calificaciones de 2, 3, 4 y 5. La suma de las calificaciones obtenidas es igual a 93; las notas de tres fueron más que las de cinco y menos que las de cuatro. Por lo demás, el número de las de cuatro se dividía por 10 y el número de las de cinco fue par. Determine cuántas y cuáles calificaciones recibió el grupo.

Resp: El número de calificaciones 2, 3, 4 y 5 es igual a 11, 7, 10 y 2, respectivamente.

70. Una motocicleta y un coche X salen simultáneamente del punto A hacia el punto B y en ese mismo instante del punto B hacia el punto A parte un coche Y que 5 horas 50 minutos después llega al punto A. Los automóviles se encontraron 2 horas 30 minutos después de la salida, y la motocicleta y el coche Y, a la distancia de 140 kilómetros del punto A. Si la velocidad de la motocicleta fuera dos veces mayor, se encontraría con el coche Y a 200 kilómetros del punto A. Hallar las velocidades de la motocicleta, el coche Y y el coche X.

Resp: La velocidad de la motocicleta es de 40 km/h, la del coche Y 60 km/h y la del coche X, 80 km/h.

71. El agua pura y un ácido de concentración constante empiezan a llegar simultáneamente por dos tubos a un recipiente. Una vez que el recipiente estuvo lleno, resultó una solución de ácido al 5 %. Y si se dejara de hacer llegar el agua en el momento cuando el recipiente está por la mitad, resultaría una solución al 10 %. Determine cuál de los tubos proporciona el líquido más rápidamente y en cuántas veces.

Resp: El agua se suministra 2 veces más rápidamente.

72. Un coche salió del punto A hacia el punto B. Simultáneamente, al encuentro de éste, del punto B partió un ciclista. Tres minutos después del encuentro, el coche regresa al instante, sigue al ciclista y, al alcanzarlo, de nuevo vuelve al instante para llegar al punto B. Si el coche regresara al instante un minuto después del encuentro y el ciclista aumentará $\frac{15}{7}$ veces la velocidad después del encuentro, aquél demoraría el mismo tiempo para recorrer todo el camino. Hallar la relación entre las velocidades del ciclista y del coche.
Resp: 1 : 3.

73. Desde el punto A hacia el punto B que distan uno de otro a 100 kilómetros, al mismo instante salieron un ciclista y un transeunte. Simultáneamente, del punto B partió un automovilista al encuentro de éstos. Una hora después de la carrera el automovilista encontró al ciclista y luego, al pasar más unos $14\dfrac{2}{17}$ kilómetros, encontró al transeunte y lo subió al coche; después de esto echaron a correr detrás del ciclista y lo alcanzaron. Calcular las velocidades con las cuales se movian el ciclista y el automovilista si es sabido que la velocidad del transeunte era igual a 5 km/h. El tiempo necesario para la subida del transeunte y el viraje del automóvil se considera igual a cero.
Resp: 20 km/h y 80 km/h.

74. Un laboratorio necesita encargar una cantidad de matraces esféricos iguales de una capacidad total de 100 litros. El valor de un matraz lo componen el costo del trabajo del obrero, proporcional al cuadrado de la superficie del matraz, y el costo del materjal, proporcional a su superficie. En estas condiciones, el matraz de 1 litro cuesta 1,25 dólares y el valor del trabajo constituye un 20 % del costo del matraz (el espesor de las paredes del matraz se considera despreciativamente pequeño). ¿Son suficientes 100 dólares para realizar el trabajo?
Resp: No.

75. El autobús N^o 1, en el que un estudiante puede llegar de su casa a la universidad, sin trasbordos, demora 2 horas 1 minuto. En cualesquiera de los autobuses N^o 2, N^o 3, ..., N^o k se puede llegar también a la universidad; sin embargo, el estudiante puede hacer trasbordo al autobús N^o p solamente del autobús N^o (p-1). Las rutas de estos autobuses son tales que el estudiante, al llegar a la universidad en uno de ellos, demorará un tiempo (sin contar los trasbordos) inversamente proporcional al número de autobuses utilizados. además de esto, en cada trasbordo invertirá 4 minutos. ¿Es cierto que hay un camino que necesita en total menos de 40,1 minutos?
Resp: No.

76. Entre el poblado A y la ciudad D se encuentran la gasolinera B y la torre de agua C que dividen la distancia AD en tres partes iguales ($AB = BC = CD$). De A hacia D salieron un coche y un ciclista, y de D hacia A, simultáneamente con éstos, salió un camión que se cruzó con el coche cerca de la torre de agua, y con el ciclista, cerca de la gasolinera. El ciclista aumentó su velocidad en 5 km/h cerca de la gasolinera. El coche, al llegar al punto D, regresó al instante con una velocidad de 8 km/h menos de la que tenía antes. Como resultado, en el momento cuando el camión llegó al punto A, al ciclista le quedaba por recorrer 7,5 kilómetros para llegar a C, y el coche, se encontraba entre B y A a 14 kilómetros de B. Hallar la distancia entre el poblado y la ciudad y las velocidades de los vehículos y el ciclista.
Resp: La velocidad del ciclista es de 20 km/h, la del camión, 40 km/h y la del coche, 80

km/h. La distancia AD es igual a 60 km.

77. Un lote rectangular con un área de 900 m^2 hay que vallar de cerca cuyos lados adyacentes deben ser de piedra y los otros dos, de madera. Un metro de la cerca de madera cuesta 10 dólares y el de piedra, 25 dólares. Para la construcción se han asignado 2000 dólares. ¿Alcanzará esta suma?
Resp: No lo alcanzará.

78. El recipiente de una torre de agua se llena por varias bombas. Al principio se pusieron en acción tres bombas de igual rendimiento y después de 2,5 horas de trabajo empezaron a funcionar dos bombas más de rendimiento distinto de las tres primeras pero igual entre sí. Como resultado, una hora después de la conexión de las bombas al recipiente le faltaban 15 m^3 para llenarse; después de una hora el recipiente estaba lleno. Una de las bombas puestas en acción más tarde podría llenar el recipiente en 40 horas. Hallar la capacidad del recipiente.
Resp: 60 m^3.

79. En las competiciones de esquís a la distancia de 10000 metros arrancó el primer esquiador y un tiempo después salió el segundo con una velocidad en 1 mt/seg mayor que la del primero. En el instante cuando el segundo alcanzó al primero éste aumentó su velocidad en 2 mt/seg, mientras que la velocidad del segundo esquiador no varió. Como resultado de esto el segundo esquiador cruzó la meta 7 minutos 8 segundos después del primero. Si la distancia fuera 500 metros más larga, el segundo esquiador llegaría a la meta 7 minutos 33 segundos más tarde que el primero. Hallar qué tiempo pasó entre la salida del primero y segundo esquiadores.
Resp: 2 minutos.

80. Tres patinadores, cuyas velocidades en sucesión forman una progresión geométrica, parten simultáneamente de carrera por un círculo. Después de un tiempo el segundo patinador adelanta al primero, recorriendo 400 metros más que éste. El tercer patinador recorre una distancia igual a la recorrida por el primero hasta el momento cuando fue adelantado por el segundo, en espacio de tiempo de $\dfrac{2}{3}$ de un minuto mayor que el primero. Hallar la velocidad del primer patinador.
Resp: 0,6 km/min.

81. Una hacienda dispone de cuatro marcas de tractores: A, B, C y D. Cuatro tractores (2 tractores de la marca B, un tractor de la marca C y uno de la marca D) realizan la arada de un campo en dos días. Dos tractores de la marca A y un tractor de la marca C invierten tres días para el mismo trabajo, y los tres tractores de las marcas respectivamente A, B y C, demoran cuatro días. ¿En qué tiempo realizarán el trabajo cuatro tractores de distintas marcas?
Resp: 12/7 días.

82. En tres campos se segaba la hierba durante tres días. En el primer día toda la hierba del primer campo se segó en 16 horas. En el segundo campo toda la hierba se segó, en el segundo día, en 11 horas. En el tercer día toda la hierba del tercer campo se segó en 5 horas: 4 horas la segaban a mano y una hora trabajaba una sola segadora. Durante el segundo y el tercer días

la hierba se segó 4 veces más que en el primero. ¿Cuántas horas trabajó la segadora si por una hora ésta segaba 5 veces más hierba que la que daba la siega a mano? Se sobreentiende que la segadora no trabajaba, mientras se realizaba la siega a mano y no había pausas en el trabajo.

Resp: 12 horas.

83. Una fábrica tiene que mandar a su cliente 1100 piezas. Para el envío las piezas se embalan en cajones. Los cajones de que se disponen son de tres tipos. En el cajón del primer tipo caben 70 piezas, en el de segundo tipo, 40 piezas, y en el de tercer tipo, 25 piezas. El costo de envío de un cajón de primer tipo es de 20 dólares, el costo de env;io de un cajón de segundo tipo es de 10 dólares, el envío de un cajón de tercer tipo es de 7 dólares. ¿Cuáles cajones debe utilizar la fábrica para que el costo de envío sea el mínimo? Los cajones deben estar completos.

Resp: 4 cajones del tercer tipo y 25 cajones del segundo tipo.

84. Un estudiante encola de nuevo todos sus sellos en otro álbum. Si pega 20 sellos en cada hoja, entonces no le alcanzará el álbum; si pega 23 sellos, le sobrará, por lo menos, una hoja vacía. Y si al estudiante se le regala igual álbum con 21 sellos, en cada hoja el estudiante tendrá 500 sellos. ¿Cuántas hojas tiene el álbum?

Resp: 12 hojas.

85. Dos tubos funcionando simultáneamente durante una hora llenan de agua $\dfrac{3}{4}$ de un depósito. Si al principio el primer tubo llena $\dfrac{1}{4}$ del depósito y luego el segundo, estando desconectado el primero, complete el volumen de agua hasta los $\dfrac{3}{4}$ del depósito, se necesitarán para esto 2,5 horas. Si se pone en funcionamiento el primer tubo durante una hora, y el segundo, media hora, el depósito se llenará más allá de la mitad. ¿En qué tiempo cada uno de los tubos llenará el depósito?

Resp: El primer tubo llenará el depósito en 2 horas, el segundo, en 4 horas.

86. Los puntoa A y B se encuentran en un río de modo que la balsa que va desde A hacia B a la velocidad de la corriente del río, recorre el trayecto AB en 24 horas. La lancha a motor recorre todo el trayecto AB, en ida y regreso, en no menos de 10 horas. Si la velocidad propia de la lancha (es decir, la velocidad en agua muerta) aumentara en un 40 %, entonces el trayecto (es decir, el espacio AB) sería recorrido por ésta en no más de 7 horas. Hallar el tiempo durante el cual la lancha a motor pasa el trayecto AB en caso de que su velocidad propia no aumente.

Resp: 4 horas.

87. Desde el punto A hacia el punto B, a las 8 a.m. sale un tren rápido. En ese mismo instante, desde el punto B hacia el punto A salen dos trenes, uno de pasajeros y otro expreso; la velocidad del tren de pasajeros es dos veces menor que la del expreso. El tren rápido encuentra al tren expreso no antes de las 10:30 a.m., y llega al punto B a las 13:50 p.m. del mismo día. Hallar la hora de llegada del tren de pasajeros al punto A si se sabe que pasa no menos de una hora entre los encuentros del tren rápido con el expreso y del tren rápido con el de pasajeros.

Resp: 16 horas 45 minutos.

88. A las 9 a.m., desde el punto A parte un ciclista que se dirige al punto B. Dos horas después de la salida del ciclista, desde A hacia B parte un automovilista que alcanza al ciclista a no más tardar las 12 del día. Siguiendo la marcha, el automovilista llega al punto B y vuelve al instante desde B hacia A. En este camino el automovilista encuentra al ciclista y llega al punto A a las 5 p.m. de ese mismo día. Hallar el tiempo de llegada del ciclista al punto B si se sabe que entre los dos encuentros del automovilista y del ciclista transcurrieron no más de 3 horas.
Resp: 18 horas.

89. Del punto A, corriente arriba, partió una canoa y del punto B, situado más arriba que el punto A por la corriente, salió, simultáneamente, una balsa. Pasadas x horas ellas se encontraron y, más adelante, se desplazaron sin paradas. Al llegar a B, la canoa, sin detenerse, dio la vuelta y alcanzó la balsa en el punto A. ¿Cuánto tiempo navegaron la balsa y la canoa hasta encontrarse en el punto A, si sabemos que la velocidad propia de la canoa es constante?
Resp: $x(1+\sqrt{2})$ horas.

90. La distancia entre dos ciudades es cubierta por un tren rápido 4 horas antes que un tren de mercancías y 1 hora antes que uno ordinario. Sabemos que la velocidad del de mercancías constituye $\dfrac{5}{8}$ de la del ordinario y es 50 km/h menor que la del rápido. Hallar las velocidades de los trenes de mercancías y del rápido.
Resp: 50 km/h y 100 km/h.

91. De dos puntos, entre los que hay una distancia igual a 2400 kilómetros, salieron, simultáneamente, al encuentro un tren ordinario y un rápido. Cada uno de ellos se desplaza a velocidad constante y, en cierto momento de tiempo, ellos se encuentran. Si ambos se movieran a la velocidad del rápido, su encuentro hubiera acontecido 3 horas antes que el momento real del encuentro. Si ambos trenes marcharan a la velocidad del ordinario su encuentro se hubiera producido 5 horas después del momento real del encuentro. Hallar las velocidades de los trenes.
Resp: 60 km/h y 100 km/h.

92. Por una circunferencia de 360 metros de largura, se mueven dos puntos, con la particularidad de que el primero recorre la circunferencia 4 segundos más rápido. Hallar la velocidad de cada punto si sabemos que el primer punto pasa por 1 segundo 4 metros más que el segundo.
Resp: 40 m/s y 36 m/s.

93. Dos puntos en movimiento por una circunferencia en una misma dirección, se encuentran después de cada 20 segundos y estando en movimiento en direcciones opuestas, cada 4 segundos. Hallar la velocidad de cada punto, si se sabe que la longitud de la circunferencia es igual a 100 metros.
Resp: 15 m/s, 10 m/s.

94. Dos puntos que se mueven por una circunferencia en la misma dirección se encuentranm cada 56 minutos y estando en movimiento en direcciones opuestas, cada 8 minutos. Hallar la velocidad de cada punto y la longitud de la circunferencia, si sabemos que durante 1 segundo el primer punto cubre una distancia $\dfrac{1}{12}$ metros mayor que el segundo.

Resp: 20 m/min, 15 m/min, 280 metros.

95. Dos puntos en movimiento por una circunferencia en una misma dirección se encuentran cada 12 minutos, con la particularidad de que el primero da la vuelta a la circunferencia 10 segundos más rápido que el segundo. ¿Qué parte de la circunferencia cubre en 1 segundo cada uno de los puntos?

Resp: $\dfrac{1}{80}, \dfrac{1}{90}$.

96. Una motonave partió del punto A al B y, después de 7,5 horas, tras ella del punto A salió una lancha. En la mitad del recorrido de A a B la lancha alcanzó a la motonave. Cuando la primera llegó a B, a la segunda le quedaban navegar $\frac{3}{10}$ de todo el recorrido. ¿Cuánto tiempo es necesario para que la motonave pase la distancia de A a B?

Resp: 25 horas.

97. Del punto A al B salió un tren ordinario. Tras él, 3 horas después, partió de A un rápido. Este alcanzó al ordinario en la mitad del recorrido de A a B. En el momento de la llegada del rápido a B el ordinario cubrió $\dfrac{15}{16}$ de todo el recorrido. ¿Cuánto tiempo necesitará el tren ordinario para cubrir la distancia de A a B?

Resp: 16 horas.

98. Del punto A al B salió un peatón. después de $\dfrac{3}{4}$ horas, tras el partió un ciclista. Cuando éste llegó a B al peatón le quedaban por pasar $\dfrac{3}{8}$ de todo el camino. ¿Cuánto tiempo necesitó el peatón para cubrir todo el recorrido, si sabemos que el ciclista alcanzó al peatón en la mitad de la distancia de A a B?

Resp: 2 horas.

99. Del punto A al B, entre los que la distancia es igual a 70 kilómetros, salió un ciclista, y, cierto tiempo después, un motociclista, cuya velocidad era 50 km/h. Esta alcanzó al ciclista a 20 kilómetros del punto A. tras haber llegado a B, 48 minutos después, el motociclista salió en dirección contraria hacia A y se encontró con el ciclista pasadas 2 horas 40 minutos luego de salir éste de A. Hallar la velocidad del ciclista.

Resp: 25 km/h.

100. Del desembarcadero A, corriente del río abajo, salieron, simultáneamente, una lancha y una balsa. La primera, después de llegar al muelle B, situado a 324 kilómetros de A, pasadas 18 horas de escala en él, partió de nuevo en dirección de A. En el momento cuando se encontraba a 180 kilómetros del muelle A, la segunda lancha que salió de A 40 horas más tarde de la primera, alcanzó a la balsa que, hasta entonces, había cubierto una distancia de 144 kilómetros. Hallar las velocidades de ambas lanchas, si se sabe que son iguales y se conoce la

velocidad de la corriente del río.
Resp: La velocidad de los barcos es igual a 15 km/h, la velocidad de la corriente es igual a 3 km/h.

101. En el río desemboca un afluente. Una lancha parte del muelle A, situado en el afluente, va corriente abajo 60 kilómetros hasta el río, a continuación río abajo 65 kilómetros hasta el desembarcadero B. Más adelante, por ese mismo itinerario, la lancha retorna, necesitando para el recorrido inverso 10 horas. Hallar la velocidad propia de la lancha si sabemos que para el recorrido por el río desde A, la lancha gasta 3 horas 45 minutos y la velocidad de la corriente del río es 1 km/h menor que la de la corriente del afluente.
Resp: 14 km/h.

102. Dos nadadores partieron, uno tras otro, en una piscina de 50 metros para la distancia de 100 metros. El segundo nadador, cuya velocidad es igual a 1,5 mt/seg, alcanzó al primero en la marca 21 metros, después, al llegar a la pared opuesta de la piscina, dio la vuelta y se encontró con el primer nadador después de $\dfrac{2}{3}$ segundos de darla. Hallar el intervalo de tiempo entre los momentos de partida de los nadadores.
Resp: 1 segundo.

103. Del punto A, en una misma dirección, salieron dos esquiadores, con la particularidad de que el segundo partió 6 minutos después que el primero y que alcanzó a éste a 2 kilómetros de la línea de salida. Al llegar a la marca de 5 kilómetros el segundo esquiador dio la vuelta y se encontró con el primero a 4 kilómetros de la línea de salida. Hallar la velocidad del segundo esquiador.
Resp: 10 km/h.

104. Dos ciclistas partieron, uno tras otro, con un intervalo de 2 minutos. el segundo alcanzó al primero a la distancia de 1 kilómetros de la línea de salida. Si después de recorrer 5 kilómetros desde la línea de salida, él hubiera dado la vuelta hacia atrás, se encontraría con el primer ciclista 20 minutos después de la partida de éste. Hallar la velocidad del segundo ciclista.
Resp: 20 km/h.

105. De A a B, simultáneamente, salen un ciclista y un peatón. La velocidad del ciclista es dos veces mayor que la del peatón. Al mismo tiempo, a su encuentro, de B a A sale el segundo peatón. El tiempo entre los encuentros de éste con el ciclista y el primer peatón constituye $\dfrac{2}{15}$ de la fracción del tiempo necesario para su recorrido de B a A. ¿Cuál de los peatones y cuántas veces iba más rápido, si hasta encontrarse los dos cubrieron más de $\dfrac{1}{4}$ de toda la distancia de A a B?
Resp: La velocidad del primer peatón es 2 veces mayor que la del segundo.

106. Del punto A al B salió una motonave. a las 8 horas ella alcanzó a una lancha, que iba por ese mismo recorrido, cuya velocidad era igual a 3 km/h. Al retornar de A a B, en el que tuvo una parada de 10 minutos, la motonave se encontró con esa misma lancha a las 8 horas 20 minutos. Al punto A la motonave llega cuando la lancha alcanza el punto B. Determine el

tiempo de llegada de la lancha al punto B, si sabemos que a las 8 horas 10 minutos ella se encontraba a 1,5 kilómetros del punto A.
Resp: En 8 horas 30 minutos.

107. Si un pasajero sale en tren del punto A, al punto B llegará después de 20 horas. Si él vuela en avión, que debe esperar más de dos horas, llegará a B pasadas 10 horas luego de partir el tren. ¿Cuántas veces es mayor la velocidad del avión que la del tren, si sabemos que tras $\frac{8}{9}$ horas de comenzar el vuelo el avión se encontrará a la misma distancia del punto A que el tren?
Resp: 10 veces más.

108. Del punto A al B salen, simultáneamente, un peatón y un ciclista. Llegado a B el ciclista da la vuelta y, tras 1 hora de haber comenzado el movimiento, se encuentra con el peatón. Después del encuentro el peatón continúa su camino hacia B y el ciclista da la vuelta y también se dirige a B. Habiendo alcanzado B, el ciclista de nuevo retorna y, una vez más, se encuentra con el peatón pasados 40 minutos del primer encuentro. Determine cuánto tiempo necesitará el peatón para cubrir la distancia de A a B.
Resp: En 3 horas.

109. Del punto A salieron tres ciclistas. El primero partió 1 hora antes que los otros dos que comenzaron el movimiento simultáneamente. Pasado cierto tiempo, el tercer ciclista alcanzó al primero, mientras que el segundo igualó al primero 2 horas después que el tercero. Determine la razón entre las velocidades de los ciclistas primero y tercero, si la razón entre las velocidades de los ciclistas segundo y tercero es igual a $2:3$.
Resp: $\frac{1}{2}$.

110. La distancia entre los puntos A y B es igual a 105 kilómetros. De A a B salió un autobús a una velocidad de v km/h. Después de 30 minutos, tras él, salió un automóvil, cuya velocidad era igual a 40 km/h. Tras de haber alcanzado al autobús, el automóvil da la vuelta y, a la misma velocidad, retorna hacia A. ¿Con qué valores de la velocidad v el autobús llegará a B antes que el automóvil llegue a A?
Resp: $30 < v < 40$.

111. Simultáneamente, de los puntos A y B salen dos correos al encuentro uno de otro. Pasado cierto tiempo ellos se encuentran. Si el primer correo hubiese salido 1 hora antes y el segundo, 0,5 hora más tarde, ellos se habrían encontrado 43 minutos antesw. Si el primero saliera 0,5 hora después y el segundo, 1 hora antes, el lugar del encuentro se trasladaría a 5600 metros. ¿Cuál es la velocidad de cada correo?
Resp: 8 km/h y 7 km/h.

112. Entre los puntos A y B se encuentra C, con la particularidad de que $AC = 17$ kilómetros, $BC = 3$ kilómetros. De A a B partió un automóvil que, al recorrer menos de dos kilómetros, se paró. Cierto tiempo después él siguió su camino hacia B y, en este momento de tiempo, de C a B partieron un peatón y un ciclista, cada uno de los que al alcanzar B, de inmediato, comenzaron el camino inverso. ¿Con cuál de ellos se igualará antes el automóvil, si sabemos

que la velocidad de éste es 4 veces mayor que la del ciclista y 8 veces mayor que la del peatón?
Resp: Con el ciclista.

113. Del punto A al punto B salió un peatón. Simultáneamente, de B a A, a su encuentro, partió un motociclista. Al encontrarse con el peatón, el motociclista lo subió en su moto, lo llevó a B, allí lo dejó y, de nuevo, partió hacia A. Como consecuencia, el peatón alcanzó B 4 veces más rápido de lo que planeó. ¿Cuántas veces más rápido hubiera llegado el motociclista al punto A, si no hubiera tenido que retornar?
Resp: 2,75.

114. Del punto A al B se ha traído una mercancía. De A la llevaron primero en un furgón y, a continuación, en un camión. La distancia del lugar del trabordo hasta el punto B es 3 veces menor que desde el punto de trasbordo al punto A. Para llevar la mercancía de A a B ha sido necesaria una cantidad de tiempo igual al tiempo requerido para ir de A a B a una velocidad de 64 km/h. ¿A qué velocidad se desplazaba el camión, si sabemos que la velocidad del furgón era no más de 75 km/h, así como que si éste y el camión hubiesen salido de los puntos A y B al encuentro uno de otro, ellos se habrían encontrado después del intervalo de tiempo necesario para recorrer la distancia de A a B a una velocidad de 120 km/h?
Resp: 48 km/h.

115. Dos ciclistas salieron, simultáneamente, al encuentro de los puntos A y B y, pasadas 2,4 horas, se encontraron. Si el primer ciclista aumentara la velocidad el 50 % y el segundo, el 20 %, para vencer la distancia de A a B al primero le hubiera hecho falta $\frac{2}{3}$ horas más que al segundo ciclista. ¿Cuánto tiempo necesitara cada ciclista para cubrir la distancia entre A y B?
Resp: En 6 horas y en 4 horas.

116. Del punto A al B partió un motociclista. Pasadas 2 horas salió tras él un automóvil que llegó al punto B al mismo tiempo que el motociclista. Si el automóvil y el motociclista hubiesen salido simultáneamente de A y B al encuentro uno de otro, se habrían encontrado tras pasada 1 hora 20 minutos después de la partida. ¿Cuánto tiempo necesita el motociclista para vencer la distancia de A a B?
Resp: En 4 horas.

117. Del punto A al B salió un ciclista. Al mismo tiempo, de B a A salió un motociclista y se encontró con el ciclista 45 minutos después de su salida. ¿Cuánto tiempo necesita el ciclista para cubrir la distancia entre A y B, si sabemos que el motociclista vence ese mismo recorrido invirtiendo 2 horas menos? Para recorrer la distancia de A a B una lancha invierte 3 horas y para la vuelta, 4 horas. ¿Cuánto tiempo navegará una balsa de A a B?
Resp: En 3 horas.

118. Para recorrer la distancia de A a B una motonave invierte 3 horas y para la vuelta, 4 horas. ¿Cuánto tiempo navegará una balsa de A a B?
Resp: 21 horas.

119. Un electricista bajó por la escalera mecánica en movimiento, empleando para ello 30 segundos. La segunda vez él bajó por la escalera mecánica parada invirtiendo 45 segundos. ¿Cuánto tiempo gastaría al bajar si estuviera parado en el peldaño de la escalera en marcha?
Resp: En 90 segundos.

120. Del punto A al B salió un autobús. Al llegar a B él continúa el desplazamiento en la misma dirección. En el momento cuando al autobus alcanzó el punto B, del punto A, en esa misma dirección, partió un automóvil. Para cubrir la distancia desde A hasta B el automóvil invierte 3 horas 20 minutos menos que el autobús en el mismo recorrido. ¿Cuántas horas son necesarias para que venzan ese recorrido el automóvil y el autobús, si sabemos que la suma de sus velocidades es 1,5 veces mayor que el tiempo necesario para que el automóvil alcance al autobús?
Resp: $\dfrac{20}{3}$ horas y $\dfrac{10}{3}$ horas.

121. Simultáneamente, de dos puntos A y B salen, al encuentro uno de otro, un ciclista y un autobús. Para el recorrido de A a B el ciclista invierte 2 horas 40 minutos más que el autobús para recorrer la distancia de B a A, mientras que la suma de dichas horas es $\dfrac{16}{3}$ veces mayor que el tiempo pasado desde el comienzo del desplazamiento del ciclista y el autobús hasta el momento de su encuentro. ¿Cuánto tiempo invierte el ciclista para ir de A a B y el autobús para vencer la distancia entre B y A?
Resp: 4 horas y $\dfrac{4}{3}$ horas.

122. Del punto A al B se ha llevado el correo. Primero lo llevó un motociclista que, cubriendo $\dfrac{2}{3}$ de la distancia entre dichos puntos, entregó el correo a un ciclista que le esperaba. El correo fue trasladado de A a B durante el intervalo de tiempo necesario para ir de A a B a una velocidad de 40 km/h. Sabemos que si el motociclista y el ciclista hubiesen salido de A a B simultáneamente al encuentro, ellos se hubieran encontrado después del lapso necesario para cubrir la distancia de A a B a la velocidad de 100 km/h. Hallar la velocidad del motociclista suponiendo que ella es mayor que la del ciclista.
Resp: 80 km/h.

123. En una mina de carbón trabajaban primero dos secciones y después de lo cual el rendimiento de la mina aumentó 1,5 veces. ¿Cuántos por ciento del rendimiento de la segunda sección constituye el de la primera si durante 4 meses las secciones primera y tercera extraen, conjuntamente, tanto carbón como arranca la segunda sección en el transcurso de un año?
Resp: El 60 %.

124. Dos brigadas comenzaron el trabajo a las 8 horas. Después de hacer en conjunto 72 piezas, ellas comenzaron a trabajar por separado. A las 15 horas quedó claro que al trabajar por separado la primera brigada produjo 8 piezas más que la segunda. Al día siguiente la primera brigada producía cada 1 hora una pieza más y la segunda durante 1 hora una pieza menos que el primer dia. Las brigadas comenzaron a trabajar a las 8 horas en conjunto y, habiendo hecho 72 piezas, de nuevo pasaron al trabajo por separado. En el transcurso de esta forma de trabajo, ya hacia las 13 horas, la primera brigada produjo 8 piezas más que la segunda. ¿Cuántas piezas por hora producía cada brigada?

Resp: Primera brigada 13 piezas, segunda brigada 11 piezas.

125. Una piscina se llena de agua por el primer tubo 5 horas antes que por el segundo y 30 horas antes que por el tercero. Es conocido que la capacidad de paso del tercer tubo es 2,5 veces menor que la del primer tubo y 24 m^3/h menor que la del segundo tubo. Hallar la capacidad de paso de los tubos primero y tercero.
Resp: 60 m^3 por hora y 24 m^3 por hora.

126. Tres obreros deben hacer 80 piezas iguales. Se sabe que, en conjunto, los tres producen por hora 20 piezas. El primer obrero fue el primero que empezó a trabajar. El hizo 20 piezas invirtiendo para hacerlas más de 3 horas. La restante parte de piezas fue hecha por el segundo y tercero obreros. Para acabar todo el trabajo emplearon 8 horas. ¿Cuánto tiempo sería necesario al primer obrero para producir las 80 piezas?
Resp: 16 horas.

127. Un petrolero se llena de petróleo trabajando dos tubos, con la particularidad de que cada uno de ellos rellenó más de $\frac{1}{4}$ de su volumen. Si la cantidad de petróleo alimentado por hora por el primer tubo hubiese sido 1,5 veces mayor y la cantidad de petróleo alimentado por hora por el segundo tubo hubiera sido 4 veces menor, el tiempo necesario para rellenar el petrolero aumentaría $\dfrac{1}{6}$ parte del tiempo que es necesario para llenar el petrolero por sólo el primer tubo. ¿Por qué tubo se alimenta mayor cantidad de petróleo y cuántas veces más?
Resp: Por el segundo tubo 2 veces más.

128. Por tres tubos se alimenta petróleo a un depósito y de él se evacua por el cuarto. El primer día los tubos tercero y cuarto trabajaron 6 horas cada uno, el segundo, 5 horas, el primero 2 horas. Como resultado el nivel del petróleo se elevó 4 metros. El segundo día los tubos primero y segundo funcionaron 3 horas cada uno, el tercero, 9 horas, el cuarto, 4 horas. Debido a esto, el nivel del petróleo se elevó 6 metros más. El tercer día los tubos segundo y cuarto funcionaron 6 horas. ¿Subió o bajó el nivel de petróleo el tercer día?
Resp: El nivel del petróleo subió.

129. Dos obreros realizaron juntos cierto trabajo en el transcurso de 12 horas. Si al principio el primer obrero hubiera hecho la mitasd del indicado trabajo y, a continuación, el segundo la parte restante, todo el trabajo hubiese sido efectuado durante 25 horas. ¿En el transcurso de qué tiempo podría realizar este trabajo cada uno de los obreros por separado?
Resp: En 20 horas y en 30 horas.

130. Dos obreros realizan cierto trabajo. Pasados 45 minutos de trabajo conjunto, el primer obrero fue enviado a realizar otro trabajo y el segundo obrero acabó la parte restante del trabajo en el transcurso de 2 horas 15 minutos. ¿Cuánto tiempo necesitaría cada uno de los obreros por separado para realizar todo el trabajo, si sabemos que el segundo necesitaría para ello 1 hora más que el primero?
Resp: En 3 horas y en 4 horas.

131. Dos torneros debían producir un determinado número de piezas. Después de trabajar en conjunto tres horas, continuó trabajando sólo el segundo tornero que trabajó 4 horas más. Después de esto, la tarea fue sobrecumplida el $12,5\,\%$. ¿Cuánto tiempo sería necesario a cada tornero por separado para cumplir la tarea, si sabemos que el segundo necesitaría 4 horas menos que el primero?
Resp: En 12 horas y en 8 horas.

132. Una piscina puede llenarse de agua con dos grifos. Si el primero se abre 10 minutos y el segundo, 20 minutos, la piscina se llenará. Si el primer grifo se abre 5 minutos y el segundo, 15 minutos, se llenará $\dfrac{3}{5}$ de la piscina. ¿En el transcurso de qué tiempo cada grifo por separado puede llenar toda la piscina?
Resp: En $\dfrac{5}{6}$ horas y en $\dfrac{5}{18}$ horas.

133. Dos brigadas trabajaron juntas 15 días, después de lo cual a ellas se unió la tercera brigada y pasados 5 días después de esto todo el trabajo fue acabado. Sabemos que la segunda brigada produce al día el $20\,\%$ más que la primera. Las brigadas segunda y tercera en conjunto podrían realizar todo el trabajo en $\dfrac{9}{10}$ del tiempo necesario para que todo el trabajo sea realizado por las brigadas primera y tercera al trabajar juntas. ¿Si las tres brigadas trabajaran juntas cuánto tiempo necesitarían para ejecutar todo el trabajo?
Resp: En 16 días.

134. Para descargar una barcaza se han destinado dos brigadas de cargadores. Si al tiempo durante el cual puede descargar la barcaza la primera brigada añadimos el tiempo que necesita la segunda brigada para hacer ese trabajo, resultan 12 horas. ¿En el transcurso de cuántas horas cada brigada puede descargar la barcaza. Si la diferencia entre esas horas constituye el $45\,\%$ de todo el tiempo necesario para descargar la barcaza trabajando juntas las dos brigadas?
Resp: En $\dfrac{20}{3}$ horas y en $\dfrac{16}{3}$ horas.

135. Para excavar una zanja se destinan dos excavadoras de diferente tipo. El tiempo necesario para que la primera excavadora cave la zanja es 3 horas menor que el que precisa la segunda para realizar ese mismo trabajo. ¿Cuántas horas necesitará cada excavadora para excavar la zanja, si la suma de dichas horas es $\dfrac{144}{35}$ veces mayor que el tiempo necesario para hacer la zanja trabajando juntas?
Resp: 7,5 horas y 10,5 horas.

136. Un barco cargero se carga con gruás. Primero, durante dos horas, trabajaron 4 grúas de igual potencia, a continuación, a ellas se unieron dos grúas más, pero de menor potencia; pasadas 3 horas después de esto la carga finalizó. Si todas las grúas hubieran comenzado a trabajar simultáneamente, la carga hibiese acabado en el transcurso de 4,5 horas. ¿Cuánto tiempo necesitan para realizar la carga 1 grúa de elevada potencia y 1 grúa de menor potencia al trabajar juntas?
Resp: En 14,4 horas.

137. A un foso se alimenta agua uniformemente. 10 bombas iguales, funcionando simultáneamente, pueden desaguar el agua del foso lleno en el transcurso de 12 horas, en tanto que 15 bombas de ese mismo tipo, en 6 horas. ¿Cuánto tiempo es necesario para vaciar el agua del foso lleno empleando 25 bombas como las indicadas al trabajar ellas conjuntamente?
Resp: En 3 horas.

138. Dos fábricas, trabajando juntas, deben transformar cierta cantidad de materia prima. Si el rendimiento de la segunda fábrica aumentara el doble el tiempo necesario para que las fábricas realizaran el trabajo disminuiría en $\frac{2}{15}$ del tiempo que se requeriría para que la primera fábrica cumpliera toda la tarea. ¿En qué fábrica el rendimiento es más alto y cuántas veces, si sabemos que cada una de las fábricas transformó no menos de $\frac{1}{3}$ de todo el volumen de la materia prima?
Resp: El rendimiento de la segunda fábrica es 2 veces mayor.

139. Dos brigadas, trabajando juntas, cavaron una zanja en 2 días. Después de esto, ellas comenzaron a cavar otra zanja de la misma profundidad y anchura, pero de una longitud 5 veces mayor. Con esto, comenzó a trabajar una brigada y, a continuación, fue sustituida por la segunda que realizó una vez y media menos trabajo que la primera brigada. La segunda zanja fue acabada en 21 días. ¿En el transcurso de cuántos días hubiera podido cavar la segunda brigada la primera zanja, si sabemos que el volumen de trabajo realizado por la primera brigada por 1 día es mayor que el ejecutado por 1 día por la segunda brigada?
Resp: En 6 días.

140. Un recipiente se llena de agua por 5 tubos. Con el primer tubo el recipiente se llena de agua en 40 minutos, con el segundo, tercero y cuarto tubos, funcionando al mismo tiempo, en 10 minutos, con el segundo, tercero y quinto tubos, trabajando conjuntamente, en 20 minutos y, por fin, con el quinto y cuarto, en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo es necesario para llenar el recipiente si los 5 tubos trabajan juntos?
Resp: En $\frac{60}{7}$ minutos.

141. Tres líneas automáticas producen iguales artículos, pero tienen diferente rendimiento. El rendimiento de las tres líneas, al funcionar simultáneamente, es 1,5 veces mayor que el de la primera y segunda líneas al trabajar juntas. La tarea de turno para la primera línea, la segunda y la tercera líneas, trabajando conjuntamente, pueden cumplirla 4 horas 48 minutos antes que la primera línea; esa misma tarea se cumple por la segunda línea 2 horas más rápido que por la primera. Hallar el tiempo necesario para que la primera línea cumpla la tarea de turno.
Resp: 8 horas.

142. Dos tractores aran una parcela dividida en dos partes iguales. Ambos tractores comenzaron a trabajar en su correspondiente parte al mismo tiempo. Pasadas 5 horas después del momento cuando ellos, en conjunto, habían arado la mitad de toda la parcela, se aclaró que al primer tractor le queda por arar $\frac{1}{10}$ de su parte y al segundo, $\frac{2}{5}$ de la suya. ¿Cuánto tiempo necesitará el segundo tractor para arar el campo?

Resp: 50 horas.

143. Tres excavadoras están ocupadas en la excavación de un foso. La diferencia entre los rendimientos de la primera y tercera excavadoras es 3 veces mayor que la diferencia entre los rendimientos de la tercera y segunda excavadora. La primera excavadora realiza $\frac{4}{5}$ de todo el trabajo, empleando para ello cierto tiempo. Igual intervalo de tiempo será necesario si, primero, la segunda excavadora realiza $\frac{1}{15}$ de toda la tarea y, a continuación, la tercera excavadora $\frac{9}{18}$ del trabajo restante. ¿Cuántas veces es mayor el rendimiento de la primera excavadora que el de la segunda?
Resp: 3 veces.

144. Un mismo trabajo puede ser realizado por tresw brigadas. En el transcurso de cierto tiempo, la primera brigada realiza $\frac{2}{3}$ de todo el trabajo. Ese mismo tiempo será preciso si, primero, la tercera brigada hace $\frac{1}{3}$ de toda la tarea y, a continuación, la segunda brigada efectúa $\frac{9}{10}$ del trabajo restante. El rendimiento de la tercera brigada es igual a la semisuma de los rendimientos de las brigadas primera y segunda. ¿Cuántas veces es mayor el rendimiento de la segunda brigada que el de la tercera?
Resp: $\frac{6}{5}$ veces.

145. Trabajando juntas, dos brigadas de estuquistas estucaron en 6 días una casa de vivienda. En otra ocasión ellas estucaron un club y realizaron un volumen de trabajo tres veces mayor que al trabajar en la vivienda. En el club primero trabajó la primera brigada y, después, fue sustituida por la segunda que acabó el trabajo, con la particularidad de que la primera brigada realizó un trabajo dos veces mayor que la segunda. El club fue estucado por ella en 35 días. ¿En cuántos días podría haber estucado la primera brigada la casa de vivienda, si sabemos que la segunda brigada hubiera invertido para ello más de 14 días?
Resp: en 10 días.

146. Una compra consta de tres objetos: A, B, C. Si A fuera 5, B, 2 y C, 2,5 veces más barato, la compra costaría 8 dólares. si el objeto A fuera 2, B, 4 y C, 3 veces más barato, el precio de la compra sería 12 dólares. ¿Cuánto cuesta toda la compra y qué es más caro, A o B?
Resp: A es 28 dólares más caro.

147. Al mezclar una disolución al 40 % de ácido con una disolución al 10 % de ácido, se obtuvieron 800 gramos de una disolución al 20 %. ¿Cuántos gramos de cada disolución fueron tomados con este objeto?
Resp: 300 gramos y 500 gramos.

148. Tenemos 735 gramos de una disolución al 21,25 % de yodo en alcohol. Hay que obtener una disolución de yodo al 10 %. ¿Cuántos gramos de alcohol hay que añadir a la disolución que teníamos?
Resp: 441 gramos.

149. Hay acero de dos marcas, una de las cuales contiene el 5 % de níquel y la otra, el 10 %. ¿Cuántas toneladas de cada una de estas marcas de acero hay que tomar para producir una aleación que contenga el 8 % de níquel, si en el segundo trozo hay 4 toneladas más de níquel que en el primero?
Resp: 40 toneladas y 60 toneladas.

150. En 500 kg de mineral hay cierta cantidad de hierro. después de extraer de la mena 200 kilógramos de impurezas, que contenían, por término medio, el 12, 5 % de hierro, el porcentaje de hieroo en el resto de la mena aumentó el 20 %. ¿Cuánto hierro quedó en la mena?
Resp: 187,5 kilogramos.

151. Una mena contiene el 40 % de impurezas, mientras que el metal fundido de ella, el 4 % de ellas. ¿Qué cantidad de metal se ontendrá de 24 toneladas de metal?
Resp: 15 toneladas.

152. De 40 toneladas de mena se funden 20 toneladas de metal con un contenido del 6 % de impurezas. ¿Cuál es el porcentaje de impurezas en la mena?
Resp: El 53 %.

153. De 38 toneladas de materia prima de segunda calidad, que contiene el 25 % de impurezas, después de la transformación se producen 30 toneladas de materia prima de primera calidad. ¿Cuál es el porcentaje de impurezas en la materia prima de primera calidad?
Resp: El 5 %.

154. Los hongos frescos contienen el 90 % de agua, los secos, el 12 %. ¿Cuántos hongos secos se obtienen de 88 kilogramos de hongos frescos?
Resp: 10 kilogramos.

155. Las abejas que transforman el néctar de las flores en miel, lo liberan en una considerable parte de agua. ?Cuántos kilogramos de néctar han de transformar las abejas para obtener 1 kilogramo de miel, si sabemos que el néctar contiene un 70 % de agua y la miel que de él se obtiene, el 17 %?
Resp: Apróximadamente 2,77 kilogramos.

156. Dos aleaciones contienen dos metales. La primera aleación contiene los metales en una razón de 1 : 2, la segunda, de 3:2. ¿En qué razón hay que tomar partes de estas aleaciones, para obtener una nueva aleación con una razón de los metales de 8 : 7?
Resp: 1 : 3.

157. Hay dos disoluciones de un ácido de diferente concentración. El volumen de una de las disoluciones es de 4 litros, el de la otra, 6 litros. Si éstas se juntan, entonces obtenemos una disolución del ácido al 35 %. Sin embargo, si se juntan iguales volúmenes de dichas disoluciones, obtenemos una disolución del ácido al 36 %. ¿Cuántos litros de ácido contiene cada una de las disoluciones iniciales?

Resp: 1,64 litros y 1,86 litros.

158. 40 kilogramos de una disolución de sal se echaron en dos recipientes de forma que en el segundo recipiente resultó haber 2 kilogramos más de sal pura que en el primero. Si añadimos al segundo recipiente 1 kilogramo de sal, la cantidad de ésta en él será dos veces mayor que en el primer recipente. Hallar la masa de la disolución contenida en el primer recipiente.
Resp: 15 kilogramos.

159. Tenemos tres lingotes. La masa del primero es de 5 kilogramos, la del segundo, de 3 kilogramos y cada uno de ellos contiene el 30 % de cobre. Si el primer lingote se funde junto con el tercero, obtenemos un lingote que contiene el 56 % de cobre, mientras que al fundir conjuntamente los lingotes segundo y tercero, se obtiene un lingote que contiene el 60 %. Hallar la masa del tercer lingote y el porcentaje de cobre en él.
Resp: 10 kilogramos, el 69 %.

160. Hay dos lingotes de oro con plata. El porcentaje de oro en el primer lingote es 2,5 veces mayor que en el segundo. Si fundimos juntos ambos lingotes, se obtiene un lingote en el que habrá el 40 % de oro. ¿Cuántas veces la masa del primer lingote es mayor que la del segundo, si se conoce que al fundir partes de igual masa de los lingotes primero y segundo se obtiene un lingote que contiene el 35 % de oro?
Resp: 2 veces.

161. Una aleación de cobre y plata contiene 2 kilogramos de cobre más que de plata. Si añadimos a la aleación $\frac{9}{16}$ de la cantidad de plata que ella contiene, el porcentaje de plata en la nueva aleación será igual al porcentaje de cobre en la aleación inicial. Hallar la masa de ésta.
Resp: 18 kilogramos.

162. Hay que tomar varios litros de un líquido a la temperatura a° y otra cantidad de ese mismo líquido, pero a la temperatura b°, para obtener la temperatura c° de la mezcla. No obstante, del segundo líquido se tomó tanto como se suponía tomar del primero y viceversa. ¿Qué temperatura de la mezcla se obtuvo?
Resp: $a + b - c$.

163. Un recipiente de 12 litros de capacidad está lleno de un ácido. De él se vierte cierta cantidad de ácido al segundo recipiente de la misma capacidad y éste se rellena de agua. A continuación, el primer recipiente se llena con la mezcla del segundo. Después de esto, del primer recipiente se echan 4 litros al segundo, tras lo cual en ambos recipientes la cantidad de ácido puro (en las disoluciones) resulta ser igual. ¿Cuánto ácido fue vertido inicialmente del primer recipiente al segundo?
Resp: 6 litros.

164. En un recipiente con agua se echaron 6 litros de una disolución de alcohol al 64 % y, a continuación, tras realizar el mezclado completo, se vertieron 6 litros de la disolución obtenida. Semejante operación se efectúa 3 veces. ¿Qué cantidad de agua había inicialmente en el recipiente, si la concentración definitiva del alcohol se hizo igual al 37 %

Resp: 18 litros.

165. Un trozo de 6 kilogramos de masa de una aleación contiene cobre. El trozo de otra aleación de 8 kilogramos de masa contiene cobre en un porcentaje dos veces menor que en el primer trozo. De éste se ha cortado cierta parte y del segundo trozo se corta una parte que por su masa es dos veces mayor que la cortada del primer trozo. Cada una de estas partes se funden con el resto del otro trozo, después de lo cual se obtuvieron dos nuevas aleaciones con igual porcentaje de cobre. ¿Cuál es la masa de cada una de las partes cortadas inicialmente de los trozos?
Resp: 2,4 kilogramos y 4,8 kilogramos.

166. De un recipiente lleno de glicerina se han vertido 2 litros de ésta y a la glicerina restante añadieron 2 litros de agua. Después del mezclado se sacaron 2 litros de la mezcla y añadieron 2 litros de agua. Por fin, se realizó de nuevo la agitación de la mezcla y de ella se sacaron 2 y añadieron 2 litros de agua. Como resultado de estas operaciones el volumen de agua en el recipiente es 3 litros mayor que el volumen de glicerina que en él queda. ¿Cuántos litros de glicerina y de agua quedaron en el recipiente a consecuencia de las operaciones realizadas?
Resp: 3,5 litros de glicerina y 0,5 litros de agua.

167. De dos depósitos, uno está lleno de glicerina y el segundo, de agua. Se toman dos cucharones de tres litros. Con el primer cucharón se saca el contenido del primer depósito y, con el segundo, el contenido del segundo depósito, después de lo cuál el primer cucharón se vierte al segundo depósito y el segundo cucharón, al primer depósito. A continuación, tras realizar el mezclado, esta operación se realizó una vez más y, como resultado, la glicerina pura ocupó la mitad del primer depósito. Hallar los volúmenes de los depósitos, si se conoce que su volumen sumario es 10 veces mayor que el del primer depósito.
Resp: 10 litros.

168. Después de fundir dos trozos de arrabio de igual masa con diferente contenido de cromo, fue obtenida una aleación que contenía 12 kilogramos de cromo. Si la masa del primer trozo hubiera sido dos veces mayor, en la aleación habría 16 kilogramos de cromo. Se sabe que el contenido de cromo en el primer trozo era el 5 % menor que en el segundo. Hallar el porcentaje de cromo en cada uno de los trozos de arrabio.
Resp: El 5 % y el 10 %.

169. Tenemos tres aleaciones. La primera contiene el 60 % de aluminio, el 15 % de cobre y el 25 % de magnesio, la segunda, el 30 % de cobre y el 70 % de magnesio, la tercera, el 45 % de aluminio y el 55 % de magnesio. Es preciso producir de ellas una aleación con un contenido del 20 % de cobre. ¿Qué porcentaje mínimo y máximo de aluminio puede haber en la nueva aleación?
Resp: El 15 % y el 40 %.

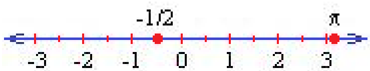
Capítulo 7

Desigualdades e inecuaciones

7.1. Desigualdades con una incógnita y de primer grado

7.1.1. La recta real

Suponemos conocidos los números reales, así como su representación en la recta real. Los números reales se pueden representar mediante expresiones decimales finitas o infinitas. Si la expresión decimal es finita o periódica infinita, entonces el número real se puede expresar como el cociente de dos números enteros y se dice que el número real es racional. Recíprocamente cualquier número racional (cociente de dos enteros) se puede expresar mediante una expresión decimal finita o infinita periódica. Cuando la expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten de manera periódica se dice que el número real es irracional.



Los números reales admiten una representación geométrica en una recta. En dicha representación cada número real se representa por un solo punto de la recta y cada punto de la recta representa un solo número real. En consecuencia, hablaremos indistintamente de número o de punto. Por convenio, los números positivos se representan a la derecha del cero y los negativos a la izquierda. Se llama recta real a una recta en la que se han representado los números reales.

7.1.2. Segmentos, desigualdades e intervalos

La representación como puntos sobre una recta revela claramente la ordenación de los números reales: cuando a es menor que b (lo que se escribe $a < b$), entonces a aparece a la izquierda de b.

Si $a < b$, el conjunto de todos los números que se encuentran entre a y b se llama intervalo abierto de a a b, y se le representa por $(a; b)$. En términos precisos, $(a; b)$ es el conjunto de todos los números x tales que $a < x < b$, el cual se denomina intervalo. (La notación $a < x < b$ quiere decir que ha de tenerse tanto $a < x$, como $x < b$.) A los números a y b se les llama extremos del intervalo $(a; b)$. Nótese que el intervalo abierto $(a; b)$ no incluye a sus puntos extremos.

Si añadimos al intervalo abierto $(a; b)$ sus puntos extremos, obtenemos el intervalo cerrado $[a; b]$, es decir, el conjunto de todas las x, tales que $a \leq x \leq b$, el cual se denomina segmento. La notación $a \leq x$ se lee, a menor o igual que x, y quiere decir que $a < x$ o $a = x$.

Nótese que al expresar un intervalo, un corchete o un punto, indican un extremo que está incluido, mientras que un paréntesis o la ausencia de un punto indican un extremo que está excluido.

La definición de intervalos puede hacerse en forma breve y concisa mediante una notación de conjuntos estándar. La frase: El conjunto de todos los números x tales que $a < x < b$, se escribe $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$. En el interior del paréntesis damos primero el símbolo x que representa a ciertos números, y luego las condiciones de x que caracterizan los números del conjunto.

Con esta notación, los intervalos abiertos y cerrados pueden definirse como sigue:

Definición 7.1 Intervalos
Sean a y b dos números reales tales que $a \leq b$. Se llama intervalo abierto de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, excluidos dichos puntos

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$

Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, incluidos dichos puntos

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$

Se llama intervalo semiabierto por la izquierda de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, excluido el punto a

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$$

Se llama intervalo semiabierto por la derecha de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, excluido el punto b

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$$

Definición 7.2 Intervalos infinitos
Se llama intervalo cerrado infinito de extremo izquierdo a, al conjunto de puntos, incluido el punto a

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\}$$

Se llama intervalo cerrado infinito de extremo derecho b, al conjunto de puntos, incluido el punto b

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b\}$$

Se llama intervalo abierto infinito de extremo izquierdo a, al conjunto de puntos, excluido el punto a

$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$$

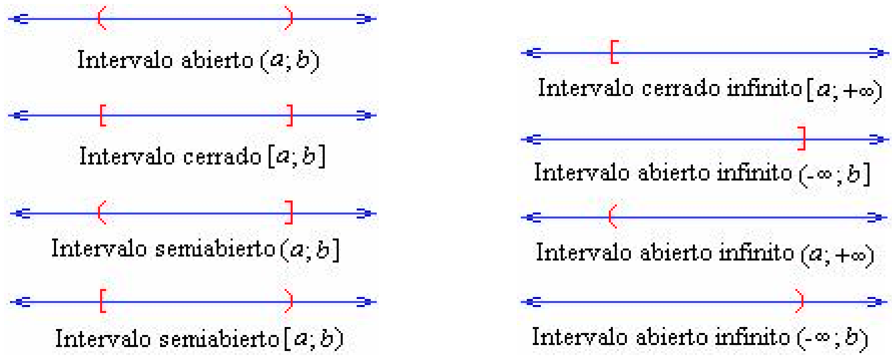
Se llama intervalo abierto infinito de extremo derecho b, al conjunto de puntos, excluido el punto b

$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}$$

Se llama intervalo abierto infinito, al conjunto de puntos definido en $\mathbb{R}$

$$(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$$

Definición 7.3 Desigualdad
Dos números o dos expresiones algebraicas, relacionadas entre sí por el signo $<$ (menor), o por el signo $>$ (mayor), o por el signo $\neq$ (no es igual), se denomina desigualdad.



Ejemplo 7.1 *Se cumplen las siguientes expresiones:*

$$25 > 3; \quad -3 < 7; \quad 5 \neq 8.$$

Definición 7.4 Desigualdades de sentido contrario
Dos desigualdades de tipo $a < b$, $c < d$ *o* $a > b$, $c > d$ *se denominan desigualdades del mismo sentido. Dos desigualdades de tipo* $a > b$ *y* $c < d$ *se denominan desigualdades de sentido contrario.*

Ejemplo 7.2 *Desigualdades del mismo sentido:* $a^2 + 2 > a$ *y* $4 > -1$. *Desigualdades de sentido contrario:* $1 < 7$ *y* $3 > -3$.

A veces a los signos $>$ o $<$ se une también el signo de igualdad $\geq$ o $\leq$. Tales desigualdades se denominan no rigurosas.

Exponemos a continuación las propiedades más importantes para las desigualdades numéricas:

1. Si los números a, b y c son tales, que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

2. Si los números a, b, c, d son tales, que $a > b$, $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

3. Si los números a, b, c, d son tales, que $a > b$ y $c < d$, entonces $a - c > b - d$.

4. Si a, b, c, d son números positivos y, además, $a > b$ y $c > d$, entonces $ac > bd$.

5. Para cualesquiera números reales a, b y c, las desigualdades $a > b$ y $a + c > b + c$ son equivalentes, es decir, la validez de la desigualdad $a > b$ predetermina que es válida la desigualdad $a + c > b + c$, y, viceversa, de la validez de la desigualdad $a + c > b + c$ se desprende la validez de la desigualdad $a > b$, es decir, $a > b$ si y sólo si $a + c > b + c$.

6. Para cualesquiera números reales a y b y para todo número positivo c, las desigualdades $a > b$ y $ac > bc$ son equivalentes, es decir, si $c > 0$, entonces $a > b$ si y sólo si $ac > bc$.

7. Para cualesquiera números reales a y b y para todo número negativo c, las desigualdades $a > b$ y $ac < bc$ son equivalentes, es decir, si $c < 0$, entonces $a > b$ si y sólo si $ac < bc$.

7.1.3. Operaciones entre desigualdades

Definición 7.5 Suma
Dos o varias desigualdades del mismo sentido se pueden sumar miembro a miembro; como resultado se obtendrá una desigualdad del mismo sentido. Es decir

$$a_1 > b_1$$

$$a_2 > b_2$$

$$...$$

$$a_n > b_n$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > b_1 + b_2 + ... + b_n$$

Definición 7.6 Resta
Las desigualdades de sentido contrario se pueden restar miembro a miembro; como resultado obtendremos una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo. Es decir, si $a > b$ *y* $c < d$*, y de la primera desigualdad restamos la segunda, entonces* $a - c > b - d$*.*

Definición 7.7 Multiplicación
Dos o varias desigualdades de igual sentido se pueden multiplicar entre sí miembro a miembro si todos sus miembros son positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido. Es decir, si $a_i > 0$*, entonces*

$$a_1 < b_1$$

$$a_2 < b_2$$

$$...$$

$$a_n < b_n$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n < b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$$

Definición 7.8 División
Dos desigualdades de sentido contrario se pueden dividir miembro a miembro si todos los miembros de la desigualdad son números positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividiendo, es decir, la desigualdad que dividimos por la otra. Es decir, si $a > b$*,* $b > 0$ *y* $c < d$*,* $c > 0$*, entonces* $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$*.*

7.1.4. Valor absoluto

Dado un número real cualquiera, a márquesele a $|a|$ unidades del origen; a la derecha si a es positivo, y a la izquierda si a es negativo. El símbolo $|a|$ se emplea aquí para representar el valor absoluto de a definido por

$$\begin{cases} |a| = a, & a > 0 \\ |0| = 0, & a = 0 \\ |a| = -a, & a < 0 \end{cases}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que para $a = 0$ es válida la igualdad $|a| = a$, podemos escribir más brevemente la siguiente definición.

Definición 7.9 Valor absoluto
Se llama valor absoluto de un número real a, y se denota por el símbolo $|a|$*, a dicho número si es positivo o cero, y a su opuesto si es negativo*

$$\begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

De la definición se deduce que para cualquier número a se verifica la desigualdad $a \leq |a|$. La interpretación geométrica del valor absoluto está implícita en las presentaciones que se ha dado para marcar puntos sobre la recta, a saber: $|a|$ es la distancia entre a y 0. En general, $|a-b|$ es la distancia entre a y b.

El valor absoluto también se puede definir de la siguiente manera

$$|a| = \text{máx}\{a,\ -a\}$$

Al valor absoluto de un número también se le llama su módulo.

El valor absoluto de un número nunca es negativo. Puede sorprender que $-a$ sea positivo, sin embargo, esto no es nada sorprendente, ya que podemos pensar en $-(-5) = +5$ que también es positivo, a pesar del signo menos inicial, ya que los dos signos menos se compensan. Igual ocurre con $-a$ donde el signo menos que aparece de manera explícita se compensa con el signo menos que a tiene implícitamente, ya que hemos supuesto, en el segundo apartado, que a es negativo.

Ejemplo 7.3 *Eliminar el valor absoluto en las siguientes expresiones:*
a) $|2+\sqrt{3}-\sqrt{7}|$; **b)** $|2+\sqrt{3}-\sqrt{15}|$.
Solución
Tenemos que comprobar si la expresión que hay dentro del valor absoluto da como resultado un número positivo o negativo, si es positivo la dejamos igual, y si es negativo la cambiamos de signo para convertirlo en positivo. Es decir:
a) $|2+\sqrt{3}-\sqrt{7}| = 2+\sqrt{3}-\sqrt{7}$;
b) $|2+\sqrt{3}-\sqrt{15}| = -(2+\sqrt{3}-\sqrt{15}) = -2-\sqrt{3}+\sqrt{15}$.

De la definición se deducen varias propiedades del valor absoluto de un número:

1. Para cualquier número real a, entonces $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. Para cualquier número real a, entonces $|a| \geq 0$.

3. Para cualquier número real a, entonces $|a| = |-a|$.

4. Para cualquier número real a, entonces $-|a| \leq a \leq |a|$.

5. El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. Es decir, si a y b son números reales, entonces

$$|ab| = |a||b|$$

6. El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor. Es decir, si a y b son números reales, entonces

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

7. Si a es un número real y n es un entero, entonces

$$|a^n| = |a|^n$$

8. Para cualquier número real a y cualquier número positivo c, entonces $|a| < c$ si y sólo si $-c < a < c$.

9. Para cualesquiera números reales a y b y cualquier número positivo c, entonces $|a-b| < c$ si y sólo si $b - c < a < b + c$.

10. Para cualquier número real a y cualquier número positivo c, entonces $|a| > c$ si y sólo si $a > c$ o bien $a < -c$.

Teorema 7.1 *Sea ε un número positivo. entonces las desigualdades $|a| \le \varepsilon$ y $-\varepsilon \le a \le \varepsilon$ son equivalentes.*

Teorema 7.2 *El valor absoluto de la suma algebraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos. Es decir, para cualesquiera números reales a y b, entonces*

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

Nótese que $|a - b| \le |a| + |b|$. Efectivamente

$$|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b|$$

Teorema 7.3 *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es menor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo. Es decir, para cualesquiera números reales a y b, entonces*

$$|a - b| \ge |a| - |b|$$

Nótese que $|a + b| \ge |a| - |b|$. Efectivamente

$$|a + b| = |a - (-b)| \ge |a| - |-b| = |a| - |b|$$

Y en conclusión nótese, además, que cualesquiera que sean dos números a y b tienen lugar las relaciones

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \text{y} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{si} \;\; b \neq 0$$

Teorema 7.4 *El valor absoluto de la diferencia de dos módulos no es mayor que el valor absoluto de la diferencia, es decir*

$$||a| - |b|| \le |a - b|$$

La noción de valor absoluto surge de una manera natural en problemas de distancia. En una recta coordenada, sean A y B puntos con coordenadas a y b. Debido a que la distancia es siempre no negativa, la distancia d, entre A y B es $d = b - a$, cuando B está a la derecha de A, y $d = a - b$, cuando B está a la izquierda de A.

En el primer caso, $b - a$ es positiva, de modo que puede escribirse

$$d = b - a = |b - a|$$

y en el segundo caso, $b - a$ es negativa, de modo que puede escribirse

$$d = a - b = -(b - a) = |b - a|$$

Por tanto, independientemente de si B está a la derecha o a la izquierda de A, la distancia d entre A y B es $d = |b - a|$. Esta fórmula es útil cuando se desconocen las posiciones relativas de A y B.

7.2. Desigualdades de primer grado con una incógnita

Definición 7.10 Desigualdad algebraica con una incógnita
Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$r(x) > q(x) \quad (o\ \ r(x) < q(x))$$

donde $r(x)$ y $q(x)$ son ciertos polinomios enteros, respecto de una incógnita; la desigualdad lleva el nombre de desigualdad algebraica con una sola incógnita.

Por cuanto el conjunto existencial de los polinomios $r(x)$ y $q(x)$ se compone de todos los números reales, el problema sobre la resolución de la desigualdad puede enunciarse de la siguiente manera: hállense todos los valores numéricos de la incógnita x, cada uno de los cuales convierte la desigualdad, en una desigualdad numérica que es verdadera. Cada valor numérico semejante recibe el nombre de solución de la desigualdad. Por eso, resolver la desigualdad significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si resulta que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad es un conjunto vacío, se dice que la desigualdad no tiene soluciones.

Definición 7.11 Desigualdades equivalentes
Dos desigualdades algebraicas $r(x) < q(x)$ y $t(x) < s(x)$ se denominan equivalentes, si cualquier solución de la primera desigualdad es también solución de la segunda y, viceversa, cualquier solución de la segunda desigualdad es solución de la primera.

En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos desigualdades que no tienen soluciones. La sustitución de una desigualdad por otra, equivalente a la primera, recibe el nombre de paso equivalente de una desigualdad a la otra. El paso equivalente suele designarse con una flecha doble $\Leftrightarrow$. La escritura

$$r(x) > q(x) \quad \Leftrightarrow \quad t(x) < s(x)$$

significa que las desigualdades $r(x) > q(x)$ y $t(x) < s(x)$ son equivalentes.

A continuación damos a conocer algunas propiedades con cuya ayuda se realizarán los pasos equivalentes:

1. Las desigualdades $r(x) > q(x)$ y $r(x) - q(x) > 0$ son equivalentes.

2. Las desigualdades $r(x) > q(x)$ y $r(x)+k > q(x)+k$ son equivalentes para cualquier número real k.

3. Las desigualdades $r(x) > q(x)$ y $kr(x) > kq(x)$ son equivalentes para cualquier número positivo k.

4. Las desigualdades $r(x) > q(x)$ y $kr(x) < kq(x)$ son equivalentes para cualquier número negativo k.

5. Supongamos que se conoce que para cualquier número real x se verifica la igualdad $r(x) = t(x)$, entonces son equivalentes las desigualdades $r(x) > q(x)$ y $t(x) < q(x)$.

Definición 7.12 Solución de una desigualdad
Se denomina solución de una desigualdad, a todo valor de x que satisface a la desigualdad dada. Resolver una desigualdad significa hallar todos los valores de la incógnita que verifican a la desigualdad dada. La búsqueda de la solución de cualquier desigualdad de primer grado con una incógnita da lugar a desigualdades elementales de la forma $x > a$ o $x < a$.

En el primer caso se dice que el numero a es el limite inferior de los valores de la incógnita, lo cual quiere decir que cualquier numero mayor que el numero a es solución de la desigualdad dada. Si sobre el eje numérico se lleva el punto correspondiente al numero a, los valores de la incógnita x que verifican la desigualdad $x > a$, se representan por los puntos que se encuentran a la derecha del punto $x = a$. En la desigualdad $x < a$ el numero a se denomina limite superior de la incógnita, lo que significa que, cualquier numero menor que a es una solución de esta desigualdad. La desigualdad $x < a$ se ilustra del siguiente modo: sobre el eje numérico se marca el punto correspondiente al número a; en tal caso, cualquier punto ubicado a la izquierda de a representa al número que verifica la desigualdad dada.

Supongamos que se pide resolver la desigualdad $ax+b > 0$, $a \neq 0$, la cual se denomina desigualdad de primer grado. En virtud de la propiedad 2, ésta desigualdad es equivalente a la desigualdad $ax > -b$, $a \neq 0$.

Examinemos los casos en que $a > 0$ y $a < 0$. Sea $a > 0$, entonces, teniendo presente la propiedad 3, la desigualdad es equivalente a la desigualdad $x > -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$. Es evidente que cualquier x del intervalo $\left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$ satisface la desigualdad anterior. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de ésta desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$. Por cuanto la desigualdad $ax + b > 0$ es equivalente, para $a > 0$, a la desigualdad $x > -\frac{b}{a}$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $ax + b > 0$ también será el intervalo $\left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$.

Todos los pasos equivalentes de la desigualdad $ax + b > 0$ a la desigualdad $ax > -b$ y, luego, a la desigualdad evidente $x > -\frac{b}{a}$ se escriben más brevemente en forma de los siguientes pasos equivalentes:

$$\begin{aligned}
ax + b > 0 \ \ (a > 0) \quad &\Leftrightarrow \quad ax > -b \ \ (a > 0) \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0);\\
ax + b > 0 \ \ (a < 0) \quad &\Leftrightarrow \quad ax > -b \ \ (a < 0) \quad \Leftrightarrow \quad (a < 0);\\
ax + b < 0 \ \ (a > 0) \quad &\Leftrightarrow \quad ax < -b \ \ (a > 0) \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0);\\
ax + b < 0 \ \ (a < 0) \quad &\Leftrightarrow \quad ax < -b \ \ (a < 0) \quad \Leftrightarrow \quad (a < 0).
\end{aligned}$$

A partir de la última desigualdad en cada una de estas equivalencias se halla fácilmente el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad dada, con la restricción indicada sobre a. Así, la solución de la desigualdad $ax+b > 0$, para $a < 0$, se representa por el intervalo $\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$; la solución de la desigualdad $ax + b < 0$, para $a > 0$, es el intervalo $\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$; y la solución de la desigualdad $ax + b < 0$, para $a < 0$, es el intervalo $\left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$.

Todo lo expuesto anteriormente, concerniente a la resolución de las desigualdades de primer grado se enuncia de la siguiente manera: un polinomio de primer grado $ax + b \ \ (a \neq 0)$:

1. Es positivo, cuando $a > 0$, para cualquier $x \in \left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$ y negativo para cualquier $x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$.

2. Es positivo, cuando $a < 0$, para cualquier $x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$ y negativo, para cualquier $x \in \left(-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$.

En particular, el binomio $(x - k)$ es positivo para todos los x que se ubican en el eje numérico a la derecha respecto del punto que representa el número k, y negativo para todo x que se dispone a la izquierda del punto mencionado. En otras palabras, el punto k divide el eje numérico en dos partes: en la parte dispuesta a la derecha del punto k el binomio $(x - k)$ es positivo, y en la otra parte, dispuesta a la izquierda del punto k, negativo. En esta propiedad del polinomio $(x - k)$ se sabe el método de intervalos y se emplea con frecuencia para resolver las desigualdades algebraicas de grados superiores.

Ejemplo 7.4 *Resuelva las inecuaciones:*
a) $\dfrac{x+1}{4} < 2\dfrac{1}{2} - \dfrac{1-2x}{3}$; **b)** $\dfrac{7x}{4} < 0,3(x+7) + 2\dfrac{1}{5}$.
Solución
a) Operando, como si se tratara de una ecuación, resulta:

$$\frac{x+1}{4} < \frac{5}{2} - \frac{1-2x}{3} \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{4} < \frac{13+4x}{6} \;\Rightarrow\; 13x + 23 > 0 \;\Rightarrow\; x > -\frac{23}{13}.$$

Por tanto el conjunto solución es el intervalo $\left(-\frac{23}{13};\ +\infty\right)$.
b) De igual forma que en la desigualdad anterior, operamos como si fuera una ecuación y resulta:

$$\frac{7x}{4} < \frac{3(x+7)}{10} + \frac{11}{5} \;\Rightarrow\; \frac{7x}{4} < \frac{3x+43}{10} \;\Rightarrow\; 29x - 86 < 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{86}{29}.$$

El conjunto solución es el intervalo $\left(-\infty;\ \frac{86}{29}\right)$.

Ejemplo 7.5 *Resuelva las inecuaciones:*
a) $(3x-2)(2x-3) - (2x-1)(x-2) + 6x \geq (2x-3)^2$;
b) $\dfrac{(3x-4)(3x+1)}{3} - \dfrac{(8x-11)(x+2)}{4} \leq \dfrac{(6x-1)(2x-3)}{12}$.
Solución
a) Operando, como si se tratara de una ecuación, resulta:

$$6x^2 - 13x + 6 - 2x^2 + 5x + 6x \geq 4x^2 - 12x + 9 \;\Rightarrow\; 10x - 3 \geq 0 \;\Rightarrow\; x > \frac{3}{10}.$$

Por tanto el conjunto solución es el intervalo $\left[\frac{3}{10};\ +\infty\right)$.
b) Siguiendo el procedimiento anterior, resulta:

$$4(9x^2 - 9x - 4) - 3(8x^2 + 5x - 22) \leq 12x^2 - 20x + 3 \;\Rightarrow\; -31x + 47 \leq 0 \;\Rightarrow\; x \geq \frac{47}{31}.$$

El conjunto solución es el intervalo $\left[-\infty;\ \frac{47}{31}\right)$.

Las desigualdades del tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 > 0 \end{cases}$$

con respecto a las cuales se buscan sus soluciones generales, forman un sistema de desigualdades de primer grado con una incógnita.

El método general de resolución del sistema de dos desigualdades tiene como objeto lo siguiente: hallamos las soluciones de cada desigualdad por separado y comparándolas establecemos cuales de las soluciones son comunes para ambas desigualdades; si no existen soluciones generales, el sistema es incompatible, o contradictorio. La elección de las soluciones generales se facilita si las soluciones de cada desigualdad se representan sobre el eje numérico.

Ejemplo 7.6 *Resuelva la inecuación*

$$4|x+2| < 2x+10$$

Solución
Aplicamos una propiedad del valor absoluto:

$$|x+2| < \frac{x+5}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{x+5}{2} < x+2 < \frac{x+5}{2}$$

de donde obtenemos un sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x+2 > -\frac{x+5}{2} \\ x+2 < \frac{x+5}{2} \end{cases}$$

Se trata de hallar la intersección de los conjuntos solución de cada una de las desigualdades. Para ello, resolvemos ambas inecuaciones por separado

$$\begin{cases} 2x+4 > -x-5 \\ 2x+4 < x+5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > -3 \\ x < 1 \end{cases}$$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución (-3; 1).

Ejemplo 7.7 *Resuelva la inecuación*

$$|x+1| - |3x+7| > 0$$

Solución
Definimos los valores absolutos:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases} \text{ y } |3x+7| = \begin{cases} 3x+7, & x \geq -\frac{7}{3} \\ -3x-7, & x < -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Tenemos cuatro combinaciones posibles:

1. $\begin{cases} (x+1)-(3x+7) > 0 \\ x \geq -1, \;\; x \geq -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6 < 0 \\ x \geq -1, \;\; x \geq -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \geq -1, \;\; x \geq -\frac{7}{3} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \oslash$.

2. $\begin{cases} (x+1)-(-3x-7) > 0 \\ x \geq -1, \;\; x < -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x \geq -1, \;\; x < -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \geq -1, \;\; x < -\frac{7}{3} \end{cases}$

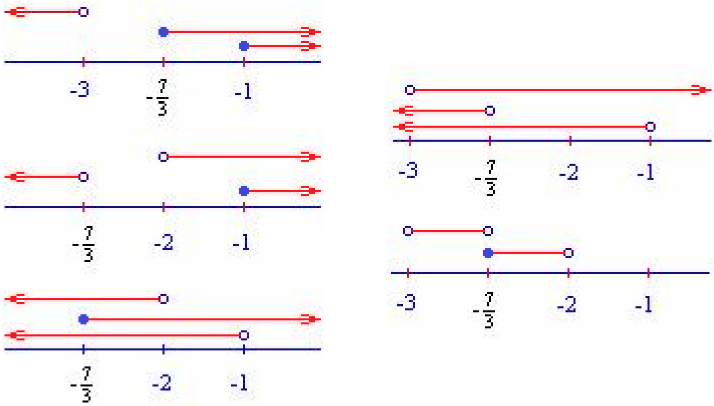
Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \oslash$.

3. $\begin{cases} (-x-1)-(3x+7) > 0 \\ x < -1, \;\; x \geq -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 < 0 \\ x < -1, \;\; x \geq -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < -1, \;\; x \geq -\frac{7}{3} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \left[-\frac{7}{3};\; -2\right)$.

4. $\begin{cases} (-x-1)-(-3x-7) > 0 \\ x < -1, \;\; x < -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x < -1, \;\; x < -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < -1, \;\; x < -\frac{7}{3} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \left(-3;\; -\frac{7}{3}\right)$. La solución general de la desigualdad (figura 4.3) se obtiene uniendo las cuatro soluciones parciales, lo cual es evidente que $x \in (-3;\; -2)$.



En general, el método más directo de atacar un problema referente a valores absolutos requiere la consideración por separado de distintos casos, con objeto de eliminar el valor absoluto. En particular, siempre habrá que considerar si lo que hay dentro del valor absoluto es positivo o es negativo. Esto hace que cuando aparecen varios valores absolutos, la casuística se complique, ya que hay que considerar, por separado, todas las posibilidades, en cuanto al signo, de las expresiones que hay dentro de cada uno de los valores absolutos.

Ejemplo 7.8 *Resuelva la inecuación*

$$|5-x| < |x-2| + |7-2x|.$$

Solución
Definimos los valores absolutos:

$$|5-x| = \begin{cases} 5-x, & x \leq 5 \\ -5+x, & x > 5 \end{cases}; \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$$

$$|7-2x| = \begin{cases} 7-2x, & x \leq \frac{7}{2} \\ -7+2x, & x > \frac{7}{2} \end{cases}$$

Tenemos ocho combinaciones posibles:

1. $\begin{cases} 5-x < (x-2)+(7-2x) \\ x \leq 5, x \geq 2, x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 0 \\ x \leq 5, x \geq 2, x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$

esta combinación es falsa, por lo tanto no tiene solución.

2. $\begin{cases} 5-x < (x-2)+(-7+2x) \\ x \leq 5, x \geq 2, x > \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7 > 0 \\ x \leq 5, x \geq 2, x > \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{2} \\ x \leq 5, x \geq 2, x > \frac{7}{2} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \left(\frac{7}{2};\ 5\right]$.

3. $\begin{cases} 5-x < (-x+2)+(7-2x) \\ x \leq 5, x < 2, x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x \leq 5, x < 2, x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leq 5, x < 2, x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in (-\infty;\ 2)$.

4. $\begin{cases} 5-x < (-x+2)+(-7+2x) \\ x \leq 5, x < 2, x > \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5 > 0 \\ x \leq 5, x < 2, x > \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 5, x < 2, x > \frac{7}{2} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \oslash$.

5. $\begin{cases} -5+x<(x-2)+(7-2x) \\ x>5, x\geq 2, x\leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5<0 \\ x>5, x\geq 2, x\leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5 \\ x>5, x\geq 2, x\leq \frac{7}{2} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \oslash$.

6. $\begin{cases} -5+x<(x-2)+(-7+2x) \\ x>5, x\geq 2, x> \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x>5, x\geq 2, x> \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>5, x\geq 2, x> \frac{7}{2} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in (5;\ +\infty)$.

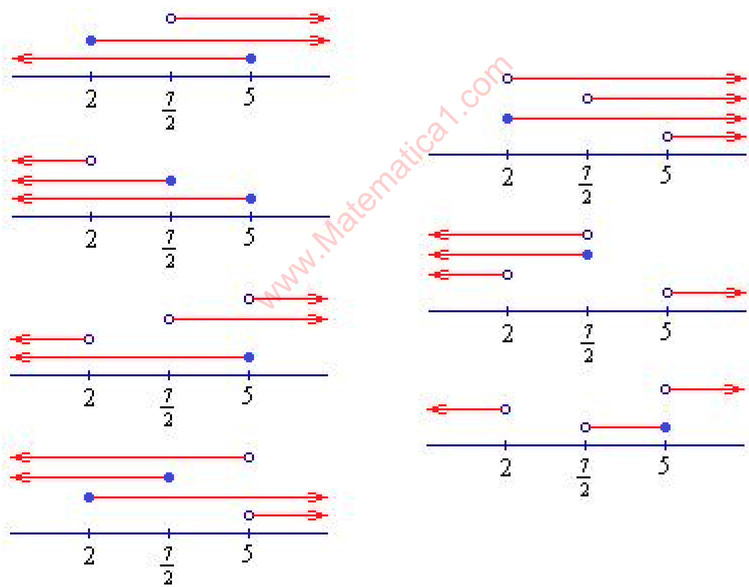
7. $\begin{cases} -5+x<(-x+2)+(7-2x) \\ x>5, x<2, x\leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7<0 \\ x>5, x<2, x\leq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{7}{2} \\ x>5, x<2, x\leq \frac{7}{2} \end{cases}$

Intersecando las soluciones, obtenemos el intervalo solución $x \in \oslash$.

8. $\begin{cases} -5+x<(-x+2)+(-7+2x) \\ x>5, x<2, x> \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<0 \\ x>5, x<2, x> \frac{7}{2} \end{cases}$

esta combinación es falsa, por lo tanto no tiene solución. La solución general de la desigualdad (figura) se obtiene uniendo las soluciones parciales:

$$x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{7}{2};\ +\infty\right).$$



7.3. Tarea

1. Resuelva las inecuaciones:

a) $3x-4>5x+6;$

b) $1-5x<9x+4;$

c) $7-2x>4x+5;$

d) $\dfrac{x-1}{2}\leq\dfrac{2x+1}{3}-1;$

e) $\dfrac{6-5x}{3}\geq\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x}{5};$

f) $\dfrac{1+x}{3}-\dfrac{x-1}{2}\geq\dfrac{2x-1}{2};$

g) $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2x-3}{3}\geq\dfrac{3}{2};$

h) $\dfrac{5x+1}{3} - \dfrac{x+1}{2} < -1;$

i) $\dfrac{x-3}{3} + \dfrac{5}{4} < \dfrac{x}{12} + \dfrac{2x+9}{15};$

j) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{1}{3} < \dfrac{7x}{6} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{18};$

k) $\dfrac{6x-3}{2} - (2x-6) \geq \dfrac{x-3}{4};$

l) $\dfrac{9x+1}{4} \leq 2x - 1;$

m) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > x + \dfrac{x}{5};$

n) $\dfrac{3x-5}{3} - \dfrac{x-1}{2} \leq x + \dfrac{1}{2};$

o) $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} > \dfrac{x+14}{2} - 2;$

p) $\dfrac{2x+1}{3} < x - \dfrac{x-3}{2};$

q) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{5} \geq 1 + \dfrac{2x-3}{15};$

r) $\dfrac{x+2}{2} - 3(x+1) \geq 2 - \dfrac{5x}{2};$

s) $\dfrac{4-x}{5} - \dfrac{1-2x}{3} \geq x + 1;$

t) $3x + 7 - 5(2x-3) \geq \dfrac{x-1}{2} - 1;$

u) $5(x-2) - \dfrac{1}{3} < 3(x-1) + 2x.$

Resp: **a)** $x \in (-\infty;\ -5);$ **b)** $x \in \left(-\dfrac{3}{14};\ +\infty\right);$ **c)** $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right);$
d) $x \in [1;\ +\infty);$ **e)** $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{75}{71}\right];$ **f)** $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{8}{7}\right];$ **g)** $x \in \left[\dfrac{9}{7};\ +\infty\right);$
h) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{5}{7}\right);$ **i)** $x \in (-\infty;\ 3);$ **j)** $x \in \left(-\dfrac{5}{6};\ +\infty\right);$ **k)** $x \in [-7;\ +\infty);$
l) $x \in (-\infty;\ -5];$ **m)** $x \in (-\infty;\ 0).$

2. Resuelva las inecuaciones:

a) $\dfrac{2(4x+2)}{3} - (x-2) \leq \dfrac{4(4x+5)}{13};$

b) $\dfrac{2+x}{3} - \dfrac{2(x-1)}{7} \geq \dfrac{7-5x}{3} - \dfrac{3(x+1)}{7};$

c) $\dfrac{2+x}{3} - \dfrac{2(x-1)}{7} \geq \dfrac{7-5x}{3} - \dfrac{3(x+1)}{7};$

d) $\dfrac{2-6x}{3} + 4x \geq -\dfrac{1}{2} - \dfrac{2-8x}{4}.$

Resp: **a)** $x \in [2;\ +\infty);$ **b)** $x \in \left[\frac{4}{9};\ +\infty\right);$ **c)** $x \in \left[\frac{4}{9};\ +\infty\right);$ **d)** $x \in \mathbb{R}.$

3. Resuelva las inecuaciones:

a) $\dfrac{x+3}{|x-5|} \geq 5;$

b) $\dfrac{|x+3|}{|x-3|} \geq 3;$

c) $\dfrac{|3x-2|}{x+5} \geq 1;$

d) $\dfrac{x-3}{|x+3|} \leq 3;$

e) $\dfrac{2x-1}{|2x+1|} \leq 2;$

f) $\dfrac{|5x-3|}{|x+1|-2x} \geq 3;$

g) $\dfrac{2x}{|3x+2|+x} \geq 1;$

h) $\dfrac{|3x-2|-x}{x+|x-1|} \geq 2;$

i) $\dfrac{|x-1|+2x}{x+5} \geq 1;$

j) $\dfrac{2x-|2x-3|}{|x+2|} \leq 1;$

k) $\dfrac{x-1}{|x+1|+x} \geq 3;$

l) $\dfrac{2x+1}{|2x-1|+1} \leq 1;$

m) $\dfrac{|3x-5|+2}{3x+1} \geq 1;$

n) $\dfrac{|2x-4|-3}{|x-1|} \leq 2;$

o) $\dfrac{|x+1|}{|2x+3|-2} \geq 3;$

p) $\dfrac{2x-|3-5x|}{|2-x|-2x} \geq 1.$

Resp:

a) $x \in \left[\dfrac{11}{3};\ 5\right)$;

b) $x \in \left[\dfrac{3}{2};\ 3\right) \cup (3;\ 6]$;

c) $x \in \left(-5;\ -\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7}{2};\ +\infty\right)$;

d) $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)$;

e) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$;

f) $x \in \left[\dfrac{3}{4};\ 1\right) \cup \left[-\dfrac{3}{2};\ 0\right]$;

g) $x \in \left(-1;\ -\dfrac{1}{2}\right)$;

h) $x \in (-\infty;\ 0]$;

i) $x \in (-\infty;\ -5) \cup [3;\ +\infty)$;

j) $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ +\infty)$;

k) $x \in (-\infty;\ -2] \cup \left[-\dfrac{4}{5};\ -\dfrac{1}{2}\right)$;

l) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{4}\right]$;

m) $x \in \left(-\dfrac{1}{3};\ 1\right]$;

n) $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$;

o) $x \in \left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{2}{5}\right] \cup \left[-\dfrac{14}{5};\ -\dfrac{5}{2}\right)$;

p) $x \in \left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3}\right) \cup \left[\dfrac{5}{2};\ +\infty\right)$.

4. Resuelva las inecuaciones:

a) $|2x+5| \geq |x+1| - 3x$;

b) $|x-5| \geq |x-1| + |x-2|$;

c) $|3x+2| \geq 3x + |x+2|$;

d) $|2x-7| \leq |2x-1| + |3x+1|$;

e) $|3x-3| - |x+3| \leq 2x+3$;

f) $|2x+3| \leq |x-1| + |x+1|$;

g) $\dfrac{|x+1|}{2} \geq \dfrac{|x+2|}{4} + x$;

h) $|2x-1| + x \geq \dfrac{|x+3|}{2}$;

i) $|x+5| - |x-5| \geq \dfrac{2x+5}{3}$.

Resp: **a)** $x \in [-1;\ +\infty)$; **b)** $x \in \left[-2;\ \dfrac{8}{3}\right]$; **c)** $x \in (-\infty;\ 0]$;
d) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{7}{3}\right] \cup [1;\ +\infty)$; **e)** $x \in \left[-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$; **f)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right]$;
g) $x \in (-\infty;\ 0]$; **h)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{3}\right] \cup [1;\ +\infty)$; **i)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{35}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5}{4};\ \dfrac{25}{2}\right]$.

5. Resuelva las inecuaciones:

a) $|x+|x|| \leq 6$;

b) $||x-|x+1|| - 2| \leq 2$;

c) $2 < |5x+2| \leq 4$;

d) $|15-2x| > 16 - 15x$;

e) $|2x-5| + |x+6| > 15$;

f) $|x-5| < |x+1|$;

g) $||x-2| - 3| > 2$;

h) $||x-2| - 3| < 4$;

i) $|x+1| + |2-x| > 3$;

j) $5x \leq \dfrac{4x+2}{2} < x$.

Resp: **a)** $x \in (-\infty;\ 3]$; **b)** $x \in \left[-\dfrac{5}{2};\ +\infty\right)$; **c)** $\left[-\dfrac{6}{5};\ -\dfrac{4}{5}\right) \cup \left(0;\ \dfrac{2}{5}\right]$;
d) $x \in \left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$; **e)** $x \in (-\infty;\ -4) \cup \left(\dfrac{14}{3};\ +\infty\right)$; **f)** $x \in (2;\ +\infty)$;
g) $x \in (-\infty;\ -3) \cup (1;\ 3) \cup (7;\ +\infty)$; **h)** $x \in [-5;\ 9]$; **i)** $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$;
j) $x \in (-\infty;\ -1)$.

6. Un escolar tenía cierta cantidad de sellos. Le regalaron un álbum para selle. Si él pega 20 sellos en cada página, el álbum es insuficiente, pero si pega 23 sellos en cada página, por lo menos, una página quedaría vacía. Si al niño le regalaran un álbum absolutamente igual, en

cada página del cual estuvieran pegados 21 sellos, él tendría un total de 500 sellos. ¿Cuántas páginas tiene el álbum?
Resp: 12 páginas.

7. El recorrido de A a B lo cubre una balsa en 24 horas y una lancha gasta en el recorrido de A a B y viceversa no menos de 10 horas. Si la velocidad propia de la lancha se aumenta el 40 %, el recorrido de A a B y viceversa ocuparía no más de 7 horas. ¿Cuánto tiempo navega la lancha de A a B y cuánto de B a A?.
Resp: El tiempo de A a B es 4 horas, el tiempo de B a A es 6 horas.

8. En dos cajones hay más de 20 piezas iguales. El número de piezas en el primer cajón, disminuido en 2, más de 3 veces sobrepasa el número de piezas en el segundo cajón. El número triplicado de piezas en el primer cajón supera el número doblado de piezas en el segundo cajón, pero no más que en 60. ¿Cuántas piezas hay en cada cajón?
Resp: En el primer cajón, 29 piezas y en el segundo, 7 piezas.

9. En dos brigadas, conjuntamente, hay más de 27 personas. El número de miembros de la primera brigada más de 2 veces sobrepasa el número de miembros de la segunda brigada, disminuido en 12. El número de miembros de la segunda brigada más de 9 veces sobrepasa el número de miembros de la primera brigada, disminuido en 10. ¿Cuántas personas hay en cada brigada?
Resp: En la primera brigada, 41 personas y en la segunda, 17 personas.

10. Si los pioneros de un campamento se forman en una columna con 8 personas en cada fila, una de las filas quedará incompleta. Si se forman con 7 personas en cada fila, habrá dos filas más, pero todas serán completas. Pero, si la formación se realiza con 5 personas en cada fila, habrá 7 filas más, pero una de ellas será incompleta. ¿Cuántos pioneros hay en el campament?
Resp: 119 pioneros.

11. Hay cierta cantidad de alambre. Si él se enrolla en bobinas que contengan 800 metros de alambre de cada una, 1 bobina no estará enrollada por completo. Lo mismo pasará si sólo empleamos bobinas que contengan 900 metros de alambre, con la particularidad de que hará falta 3 bobinas menos. Pero, si el alambre se enrolla sólo en bobinas de una capacidad de 1100 metros, se necesitarán 6 bobinas menos, pero todas ellas estarán ocupadas por completo. ¿Cuántos metros de alambre había?
Resp: 25300 metros.

12. Si un líquido se vierte en botellas de 40 litros de capacidad, con ello una botella quedará no del todo llena. Si ese mismo líquido se vierte en botellas de 50 litros de capacidad, se necesitarán 5 botellas menos y todas ellas estarán llenas. Si el líquido se vierte en botellas de 70 litros de capacidad, se necesitarán 4 botellas menos, pero, de nuevo, una botella no estará llena del todo. ¿Cuántos litros de líquido había?
Resp: 850 litros.

13. A dos brigadas con un efectivo total de 18 personas fue encargado organizar la guardia continua de 24 horas, cada vez con una persona, en el transcurso de 3 días. Los primeros dos

días llevaron la guardia los miembros de la primera brigada, dividiendo entre sí, por partes iguales, todo ese tiempo. Es conocido que en la segunda brigada había 3 muchachos y, los demás muchachos, con la particularidad de que las primeras hicieron guardia 1 hora cada una y los segundos, dividieron el tiempo restante entre ellos, por partes iguales. Al calcular los resultados, resultó que la suma de horas de guardia de cada muchacho de la segunda brigada y de cualquier miembro de la primera era menor que 9 horas. ¿Cuántas personas había en cada brigada?
Resp: Por 9 personas.

14. Al comprar varios libros iguales y cuadernos del mismo tipo, pagaron por los primeros 10 dólares con 56 centavos y por los segundos, 56 centavos. Fueron comprados 6 libros más que cuadernos. ¿Cuántos libros compraron si el precio de un libro es 1 dólar mayor que el de un cuaderno?
Resp: 8 libros.

15. Un grupo de 30 estudiantes daba los exámenes. Con ello se ponían las notas; 2, 3, 4, 5. La suma de las notas obtenidas era igual a 93, con la particularidad de que 13 hubo más que 5 y menos que 4. Además, el número de 4 se dividía por 10, el número de 5 era par. ¿Cuántas notas de cada tipo recibió el grupo?
Resp: Doses 11, treses 7, cuatros 10, cincos 2.

16. Un grupo de estudiantes decidió comprar una cámara de un precio desde 170 hasta 195 dólares. Pero, en el último momento dos estudiantes se negaron a participar en la compra y, por ello, cada uno de los restantes tuvo que dar 1 dólar más. ¿Cuánto costó la camara?
Resp: 180 dólares.

17. Un artículo de superior calidad es más caro que un artículo de primera calidad, en cuanto éste es más caro que un asrtículo de segunda calidad, pero esta diferencia en el precio no sobrepasa el 40 % del precio del artículo de primera calidad. La empresa pagó 9600 dólares por los artículos de superior calidad y esa misma cantidad por los artículos de segunda calidad. La cantidad total de todos los artículos comprados constituía 1400 unidades. ¿Cuánto cuesta un artículo de primera calidad?
Resp: 14 dólares.

7.4. Desigualdad de segundo grado

Apliquemos el método de intervalos a la resolución de las desigualdades algebraicas de segundo grado. Analicemos la desigualdad cuadrática

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a \neq 0$$

Realizando la transformación de formación de cuadrado perfecto, obtenemos

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Por eso, la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$ es equivalente a la desigualdad

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] > 0, \quad a > 0$$

Sea $a > 0$. Entonces, ésta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0, \quad a > 0$$

CASO 1: Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces, cualquiera que sea el valor numérico de la incógnita $x = x_0$, en el primer miembro de la desigualdad figura la suma del número no negativo $\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2$ con el número positivo $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, es decir, la desigualdad se convierte en una desigualdad numérica que es verdadera. Por consiguiente, la desigualdad es válida para cualquier x. En otras palabras, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad es en este caso el conjunto de todos los números reales.
CASO 2: Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces, obviamente, la desigualdad se convierte en una lícita desigualdad numérica para todo x, a excepción del número $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad será en este caso el conjunto $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.
CASO 3: Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la desigualdad es equivalente a la desigualdad $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, $a > 0$ donde

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Es evidente que $x_1 < x_2$, razón por la cual, al aplicar el método de intervalos, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de ésta desigualdad será el conjunto $(-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$.

Sea $a < 0$. Entonces, la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$ es equivalente a la desigualdad

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0, \quad a < 0$$

a) Si $b^2 - 4ac < 0$, resulta evidente que para todo número x esta desigualdad se convierte en una desigualdad ilícita, por lo cual ésta desigualdad no tiene soluciones.
b) Si $b^2 - 4ac = 0$, resulta también evidente que ésta desigualdad no tiene soluciones.
c) Si $b^2 - 4ac > 0$, ésta desigualdad será equivalente a la desigualdad $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, $a < 0$ donde

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Es obvio que $x_1 > x_2$, y por ello, al aplicar el método de intervalos, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ es el intervalo $(x_2; x_1)$.

De modo análogo se efectúa la resolución de la desigualdad $ax^2 + bx + c < 0$ $(a \neq 0)$.

Ejemplo 7.9 *Resuelva la inecuación*

$$x(x-3)-2<3x-(x^2+2)$$

Solución
$x^2-3x-2<3x-x^2-2 \;\Rightarrow\; 2x^2-6x<0 \;\Rightarrow\; x(x-3)<0 \;\Rightarrow\; x\in(0;\;3).$

Ejemplo 7.10 *Resuelva la inecuación*

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}>\frac{8}{x^2-1}$$

Solución
$$\frac{x(x+1)-2(x-1)}{x^2-1}>0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-6}{x^2-1}>0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x+1)}>0$$

$$x\in(-\infty;\;-2)\cup(-1;\;1)\cup(3;\;+\infty)$$

Ejemplo 7.11 *Resuelva las inecuaciones:*

$$\frac{4}{|x+1|}\geq|x-1|$$

Solución
Haciendo la descomposición del valor absoluto del numerador y denominador, obtenemos:

$$|x+1|=\begin{cases}x+1, & x\geq-1 \;\;(1)\\ -x-1, & x<-1 \;\;(2)\end{cases},\quad |x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq1 \;\;(3)\\ -x+1, & x<1 \;\;(4)\end{cases}$$

En este caso tenemos cuatro combinaciones posibles.
Primera: (1) y (3)
Esta combinación nos da el siguiente intervalo de existencia $x\geq1$. Resolviendo la desigualdad, encontramos

$$\frac{4}{(x+1)-2}\geq x-1 \;\Rightarrow\; \frac{4}{x-1}-x+1\geq0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+1)(x-3)}{x-1}\leq0$$

La solución de esta desigualdad nos da $x\in(-\infty;\;-1]\cup(1\;3]$. La intersección de estos dos intervalos, nos da la solución de la combinación: $x\in(1;\;3]$.
Segunda: (1) y (4)
Esta combinación nos da el siguiente intervalo de existencia $-1\leq x<1$. Resolviendo la desigualdad, encontramos

$$\frac{4}{(x+1)-2}\geq-x+1 \;\Rightarrow\; \frac{4}{x-1}+x-1\geq0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-2x+5}{x-1}\geq0$$

La solución de esta desigualdad nos da $x\in(1;\;+\infty)$. La intersección de estos dos intervalos, da la solución de la combinación: $x=\oslash$.
Tercera: (2) y (3)
Esta combinación no está determinada.
Cuarta: (2) y (4)
Esta combinación nos da el siguiente intervalo de existencia $x\in(-\infty;\;-1)$. Resolviendo la desigualdad, encontramos

$$\frac{4}{(-x-1)-2}\geq-x+1 \;\Rightarrow\; \frac{4}{-x-3}+x-1\geq0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+2x-5}{x+3}\geq0$$

La solución de esta desigualdad nos da $x \in \left[-2\sqrt{2}-1;\ -3\right) \cup \left[2\sqrt{2}-1;\ +\infty\right)$. La intersección de estos dos intervalos, nos da la solución de la combinación: $x \in \left[-2\sqrt{2}-1;\ -3\right)$. La solución de la desigualdad esta dada por la unión de los intervalos encontrados en cada una de las combinaciones, es decir:

$$x \in \left[-2\sqrt{2}-1;\ -3\right) \cup (1;\ 3).$$

Ejemplo 7.12 *Resuelva las inecuaciones:*

a) $\dfrac{x-\sqrt{4x^2-1}}{x+1} \geq 1;$ **b)** $\dfrac{\sqrt{6x^2-1}-x^2}{x^2-1} \geq 1;$ **c)** $\dfrac{x-\sqrt{4-9x^2}}{\sqrt{1-4x^2}} \leq 1.$

Solución

a) Para resolver esta inecuación, transformamos la expresión original

$$\frac{x-\sqrt{4x^2-1}}{x+1}-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ \frac{x-\sqrt{4x^2-1}-x-1}{x+1} \geq 0 \ \Rightarrow\ \frac{1+\sqrt{4x^2-1}}{x+1} \leq 0$$

De la última expresión, establecemos las siguientes restricciones

$$\begin{cases} 4x^2-1 \geq 0 \\ x+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-1)(2x+1) \geq 0 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ x<-1 \end{cases}$$

Intersecando estas soluciones parciales, obtenemos que la solución de la inecuación es $x<-1$.

b) Resolvemos la inecuación, transformando la expresión

$$\frac{\sqrt{6x^2-1}-x^2}{x^2-1}-1 \geq 0 \ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{6x^2-1}-x^2-x^2+1}{x^2-1} \geq 0 \ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{6x^2-1}-2x^2+1}{x^2-1} \geq 0$$

De la última expresión, establecemos las siguientes restricciones

$$\begin{cases} 6x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1>0 \\ \sqrt{6x^2-1}-2x^2+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{6}\,x-1)(\sqrt{6}\,x+1) \geq 0 \\ (x-1)(x+1)>0 \\ \sqrt{6x^2-1}-2x^2+1>0 \end{cases}$$

La primera restricción tiene como solución $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$.
La segunda restricción, tiene como solución $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
A continuación solucionamos la tercera restricción

$$\sqrt{6x^2-1}>2x^2-1 \ \Rightarrow\ \left(\sqrt{6x^2-1}\right)^2>(2x^2-1)^2 \ \Rightarrow\ 2x^4-5x^2+1<0$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}; -\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\right) \cup \left(\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}; \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\right)$$

Intersecando las tres soluciones parciales, obtenemos la solución general de la inecuación

$$x \in \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\right).$$

c) Para resolver esta inecuación, transformamos la expresión original

$$\frac{x-\sqrt{4-9x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}-1 \leq 0 \ \Rightarrow\ \frac{x-\sqrt{4-9x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}} \leq 0$$

De la última expresión, establecemos las siguientes restricciones

$$\begin{cases} 4-9x^2 \geq 0 \\ 1-4x^2 \geq 0 \\ x-\sqrt{4-9x^2}-\sqrt{1-4x^2}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x-2)(3x+2) \leq 0 \\ (2x-1)(2x+1) \leq 0 \\ x-\sqrt{4-9x^2}-\sqrt{1-4x^2}<0 \end{cases}$$

La primera restricción tiene como solución $x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$.
La segunda restricción, tiene como solución $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
A continuación solucionamos la tercera restricción

$$x<\sqrt{4-9x^2}+\sqrt{1-4x^2} \ \Rightarrow \ x^2<\left(\sqrt{4-9x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)^2 \ \Rightarrow \ 52x^4-40x^2+9<0$$

Esta última inecuación no tiene soluciones reales. Por tanto la solución general de la inecuación, esta dada por la intersección de las soluciones parciales, es decir $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

7.5. Tarea

1. Resuelva las inecuaciones:

a) $2x-\dfrac{9}{x-3}>x-\dfrac{5}{x-3}$;

b) $1+\dfrac{24-4x}{x^2-2x-15}>0$;

c) $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{4}{(1-x)(x-5)}$;

d) $1+\dfrac{15-7x}{x^2+x-6}>0$;

e) $x+1 \geq \dfrac{1}{1-x}$;

f) $1+\dfrac{1-8x}{x^2+4x+3} \leq 0$;

h) $\dfrac{3x^2-3x+8}{x^2+x+1} \geq 2$;

i) $\dfrac{x^2-x-4}{x^2-3x+4} \leq \dfrac{1}{2}$;

j) $\dfrac{3x^2-x+30}{x^2+4x+5} \leq 2$;

k) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}<\dfrac{8}{x^2-1}$;

l) $\dfrac{(2x+1)^2(2x-1)^3}{(x-1)^4}>0$;

m) $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{(5-2x)}>0$;

o) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0$;

p) $\dfrac{x^2-4x-2}{9-x^2}<0$;

q) $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0$;

r) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$;

s) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leq 0$;

t) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$;

u) $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3$;

v) $\dfrac{7x-4}{x+2} \geq 1$;

w) $\dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8}>2$;

x) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$;

y) $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$;

z) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$.

Resp: **a)** $x \in (-1;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; **b)** $x \in (-\infty;\ -3) \cup (5;\ +\infty)$;
c) $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 5)$; **d)** $x \in (-\infty;\ -3) \cup (2;\ +\infty) \setminus \{3\}$; **e)** $x \in (1;\ +\infty) \cup \{0\}$;
f) $x \in (-3;\ -1) \cup \{2\}$; **h)** $x \in (-\infty;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$; **i)** $x \in [-4;\ 3]$;
j) $x \in [4;\ 5)$; **k)** $x \in (-2;\ -1) \cup (1;\ 3)$; **l)** $x \in \left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right) \setminus \{1\}$.

2. Resuelva las inecuaciones:

a) $\dfrac{1}{3x-2-x^2}>\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$;

b) $\dfrac{3}{6x^2-x-12}<\dfrac{25x-47}{10x-15}-\dfrac{3}{3x+4}$;

c) $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} \geq \dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$;

d) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1} \leq \dfrac{1-2x}{x^3+1}$;

e) $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)} - \dfrac{11(6-x)}{3(x-4)} \geq \dfrac{5(6-x)}{x-2}$;

f) $\dfrac{1}{3(x-2)} + \dfrac{1}{(x+1)(2-x)} > 0$;

g) $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0$.

3. Resuelva las inecuaciones:

a) $\left|\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{x+1}{2x}\right| \leq \dfrac{3}{2}$;

b) $x-3 < \left|\dfrac{2x^2-3}{x-1}\right|$;

c) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$;

d) $\left|\dfrac{x^2-1}{2x-3}\right| \geq x-2$;

e) $\left|\dfrac{x^2}{x-1}\right| \geq \dfrac{x^2-16}{x+4}$;

f) $\dfrac{1}{|-x-2|} \geq 2x-3$;

g) $2x - \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| > -3$;

h) $\dfrac{|x^2-x+4|}{x^2-1} \geq 0$;

i) $\left|\dfrac{3x^2+6}{2x+1}\right| \leq -2x+9$;

j) $\left|\dfrac{x+3}{x+16}\right| > \dfrac{3}{x-3}$;

k) $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| \geq \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$;

l) $\dfrac{3}{|x+3|-1} < |x+2|$;

m) $\left|\dfrac{x^2-5x-4}{x^2-4}\right| < 1$;

n) $\left|\dfrac{2x-x^2+1}{-x^2+3x-2}\right| > 1$;

o) $|2x-1| < |14x+1|$;

p) $|1-3x| - |2x+3| \geq 0$;

q) $|1-2x| > 3-x$;

r) $|x+8| \leq 3x-1$;

s) $|4-3x| \geq 2-x$;

t) $|5x^2-2x+1| < 1$;

u) $|6x^2-2x+1| \leq 1$;

v) $|-2x^2+3x+5| > 2$;

w) $x^2+2|x|-3 \leq 0$;

x) $x^2+5|x|-24 > 0$;

y) $|x^2+x+10| \leq 3x^2+7x+2$;

z) $|2x^2+x+11| > x^2-5x+6$.

Resp: **a)** $x \in \left[\dfrac{2-\sqrt{109}}{21};\ \dfrac{8-\sqrt{109}}{9}\right] \cup \left[\dfrac{2+\sqrt{109}}{21};\ \dfrac{8+\sqrt{109}}{9}\right]$; **b)** $x \neq 1$;

c) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2};\ 2\right]$; **d)** $x \neq \dfrac{3}{2} \cap \left(-\infty;\ \dfrac{7+\sqrt{21}}{2}\right]$; **e)** $x \neq 1$;

f) $x \neq -2 \cap \left(-\infty;\ \dfrac{\sqrt{57}-1}{4}\right]$; **g)** $x \in \left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2};\ +\infty\right)$;

h) $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; **i)** $x \in \left(-\infty;\ 8-\sqrt{79}\right] \cup \left[\dfrac{8-\sqrt{85}}{7};\ \dfrac{8+\sqrt{85}}{7}\right]$;

j) $x \in (-\infty;\ 3) \cup (9,2;\ +\infty) - \{-16\}$; **k)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{5}{2}\right] \cup [-1,82;\ 0,82] \backslash \{-1,\ -2\}$;

l) $x \in 9-\infty;\ -5) \cup (-4;\ -2) \cup (\sqrt{3}-2;\ +\infty)$; **m)** $x \in \left(\dfrac{5-\sqrt{89}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{89}}{4};\ \right)$;

n) $x \neq 1-\sqrt{2} \cap x \neq 1+\sqrt{2} \cap x \neq 2 \cap x \neq 1$.

4. Resuelva las inecuaciones:

a) $||x-2|-x+3| < 5$;

b) $|x-6| > |x^2-5x+9|$;

c) $|x|+|x-1| < 5$;

d) $|x+1|+|x-2| > 5$;

e) $|2x+1|-|5x-2| \geq 1$;

f) $|2x-|3-x|-2| \leq 4$;

g) $|x-1|+|2-x| > 3+x$;

h) $||2x+1|-5| > 2$;

i) $||x-3|+1| \geq 2$;

j) $||x-1|+x| < 3$;

k) $|4x^2-9x+6| > x^2+x-3$;

l) $|3x-1|+|2x-3|-|x+5| < 2$.

5. Resuelva las inecuaciones:

a) $x^2 - |3x+2| + x \geq 0$; **e)** $3x^2 - |x-3| > 9x - 2$; **i)** $|x^2+2x-3| \geq 3-3x-x^2$;
b) $2x^2 - 7|x| + 3 \geq 0$; **f)** $x^2 + 4 \geq |3x+2| - 7x$; **j)** $|4+3x-x^2| \leq x^2-3x-4$;
c) $|x-3| \leq 2x^2 + 1$; **g)** $x^2 - |5x-3| - x < 2$; **k)** $|x^2-3x+2| \leq 2x - x^2$.
d) $|x-2| \leq 2x^2 - 9x + 9$; **h)** $|x^2-4| \geq 4 - 3x - x^2$;

Resp: **a)** $x \in (-\infty;\ -2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3};\ +\infty)$;
b) $x \in (-\infty;\ -3] \cup \left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right] \cup [3;\ +\infty)$; **c)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[-\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};\ +\infty\right)$;
d) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right)$; **e)** $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3};\ +\infty\right)$;
f) $x \in (-\infty;\ -5-\sqrt{19}] \cup [\sqrt{2}-2;\ +\infty)$; **g)** $x \in (-5;\ 3+2\sqrt{2})$;
h) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{3+\sqrt{73}}{4}\right] \cup [;\ +\infty)$; **i)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{5+\sqrt{73}}{4}\right] \cup [0;\ +\infty)$;
j) $x \in (-\infty;\ -1] \cup [4;\ +\infty)$.

6. Resuelva las inecuaciones:

a) $\left|-\dfrac{5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$; **d)** $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| > 1$; **g)** $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$;
b) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 3$; **e)** $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| \leq 3$; **h)** $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$;
c) $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right| \geq 2$; **f)** $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \geq 1$; **i)** $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$.

7. Resuelva la inecuación:
$$\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right| + \left|\frac{x-1}{x-2}\right| < 12.$$

8. Resuelva la inecuación:
$$|2x - \sqrt{x^2-2x+1}| = \left|\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}\right|.$$

9. Resuelva la inecuación:
$$|x^2-10x+25| \leq 2|x-5| + 35.$$

10. Resuelva la inecuación:
$$\frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-1-|x|} \geq 0.$$

11. Resuelva la inecuación:
$$\frac{|x-6|-|x|}{|3x-2|+|4x-3|} \leq 0.$$

12. Resuelva la inecuación:
$$\sqrt{2x-5} < ||2x-2| - |3-2x||.$$

13. Resuelva la inecuación:

$$\frac{|5x-5|-|5x+15|}{x^2+x+1} < \frac{|2x-2|-|4x+12|}{(x+1)^2-x}.$$

14. Resuelva la inecuación:

$$\frac{x}{|x^2+4|} > \frac{x-3}{|x^2+x+4|}.$$

15. ¿Con qué valores de k la desigualdad $\dfrac{x^2+kx-1}{2x^2-2x+3} < 1$ se verifica con toda x?

16. Resuelva las inecuaciones:

a) $2\sqrt{x+5} > x+2$;
b) $x+4 \leq \sqrt{6-4x-x^2}$;
c) $\sqrt{3x^2-6x+3} \leq x+3$;
d) $x+1 < 4\sqrt{x+6}$;
e) $x-2 < \sqrt{4+2x-x^2}$;
f) $\sqrt{2x^2+4x+2} \geq x+4$;
g) $\sqrt{x^2-3x-10} > x+2$;
h) $\sqrt{9x^2+6x+1} < 2-x$;
i) $\sqrt{5-x^2} > x-1$;
j) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x} \geq 1$;
k) $\sqrt{x^2+2x-3} > x$;
l) $\sqrt{x^2-x-2} > x-1$;
m) $\sqrt{2x+3} < 1-\sqrt{x+2}$;
n) $\sqrt{-x}-\sqrt{x+1} > 0,25$;
o) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$;
p) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
q) $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}$;
r) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > 0,5$;
s) $\sqrt{4x^2+16x+16} < 2x+10$;
t) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x-3}$;
u) $\sqrt{1-6x}+1 \geq -3x$;
v) $\sqrt{24-2x-x^2} < x$;
w) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x} < 5$;
x) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x-2} > 3$;
y) $x+4 > 6\sqrt{x-4}$;
z) $\sqrt{x^2-2x-15} > -3$.

Resp: **a)** $x \in [-5;\ 4)$; **b)** $x \in [-2-\sqrt{10};\ -1]$; **c)** $x \in [3-2\sqrt{3};\ 3+2\sqrt{3}]$;
d) $x \in [-6;\ 19)$; **e)** $x \in [1-\sqrt{5};\ 3)$; **f)** $x \in (-\infty;\ 2-3\sqrt{2}] \cup [2+3\sqrt{2};\ +\infty)$;
g) $x \in (-\infty;\ -2] \cup (14;\ +\infty)$; **h)** $x \in \left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{1}{4}\right)$; **i)** $x \in [-\sqrt{5};\ 2)$;
j) $x \in \left[5;\ \dfrac{14-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{14+\sqrt{7}}{2};\ 9\right]$; **k)** $x \in (-\infty;\ -3] \cup \left[\dfrac{3}{2};\ +\infty\right)$;
l) $x \in (-\infty;\ -1] \cup (3;\ +\infty)$; **m)** $x \in \left[-\dfrac{3}{2};\ 2-2\sqrt{3}\right)$; **n)** $x \in \left[-1;\ -\dfrac{16+\sqrt{31}}{32}\right)$;
o) $x \in \left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ 1\right]$; **p)** $x \in [0;\ 3]$; **q)** $x \in [-1;\ 1]$;
r) $x \in \left[-1;\ \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}\right) \cup \left(\dfrac{8+\sqrt{31}}{8};\ 3\right]$; **s)** $x \in \left(-\dfrac{7}{2};\ +\infty\right)$; **t)** $x \in \left[\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right)$;
u) $x \in \left[-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{1}{6}\right]$; **v)** $x \in (3;\ 4]$; **w)** $x \in [0;\ 4)$; **x)** $x \in [2;\ 3) \cup (6;\ +\infty)$;
y) $x \in [4;\ 8) \cup (20;\ +\infty)$; **z)** $x \in (-\infty;\ -3] \cup [5;\ +\infty)$.

17. Resuelva las inecuaciones:

a) $\sqrt{2x-1} < x+2;$

b) $\sqrt{x^2+x-2} \geq 2(x+2);$

c) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geq 1;$

d) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} > 8;$

e) $\sqrt{2x+1} < 5;$

f) $\sqrt{3x-2} > 1;$

g) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}} \geq 2;$

h) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-2}} \leq 3;$

i) $\sqrt{2x+19} < 3x-5;$

j) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2} < x-8;$

k) $\sqrt[3]{x+5} + 2 > \sqrt[3]{x-3};$

l) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x;$

m) $\sqrt{x^2-x-12} < x;$

n) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0;$

o) $\sqrt{9x-20} < x;$

p) $\sqrt{x^2-4x} > x-3;$

q) $\sqrt{3x^2-22x} > 2x-7;$

r) $\sqrt{x^2-5x+6} \leq x+4;$

s) $\sqrt{2x^2+7x+50} \geq x-3;$

t) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \leq 1;$

u) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} \geq 2;$

v) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 1;$

w) $x^2 + \sqrt{x^2+11} < 31;$

x) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{4}} < 0;$

y) $\sqrt{x^2-2x-3} > 3(x+1);$

z) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}} \geq \dfrac{7}{12}.$

18. Resuelva las inecuaciones:

a) $x^2+5x+4 < 5\sqrt{x^2+5x+28};$

b) $0,25x > (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1);$

c) $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} > \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x};$

d) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} - \sqrt{4x+5} < 0.$

e) $2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq 2\sqrt{x-3};$

f) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5};$

g) $\sqrt{17-4x} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{13x+1};$

h) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-5};$

i) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x} \geq 0;$

j) $\sqrt{2\sqrt{7}+x} - \sqrt{2\sqrt{7}-x} > \sqrt[4]{28};$

k) $x^2+3x-10+3\sqrt{x(x+3)} > 0;$

l) $2x^2 - \sqrt{2x^2-13x+21} < 13x+9;$

m) $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1;$

n) $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9;$

o) $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}} > 0;$

p) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x};$

q) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}};$

r) $\sqrt{x^2+3x+4} + \sqrt{x+1} > -3.$

s) $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+6} < 1;$

t) $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 \leq 3x+7;$

u) $\sqrt{2x^2+7x-4} < 2(x+4);$

v) $(1+x^2)\sqrt{x^2+1} > x^2-1;$

w) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} < x+1;$

x) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} < 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}};$

y) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} \geq \sqrt{2};$

z) $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x - \sqrt[3]{2};$

19. Resuelva las inecuaciones:

a) $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1;$

b) $1 + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} > \dfrac{3}{2};$

c) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1;$

d) $\sqrt{x^2+\dfrac{x-1}{2}} \geq \dfrac{3-x}{3};$

e) $\sqrt{\dfrac{3x-9}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{5-x}{x+1}} > 0;$

f) $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-2}} \geq \sqrt{x};$

g) $-1 < \dfrac{x^2+3x-1}{4-x^2} < 1;$

h) $1 < \dfrac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} < 2.$

Resp: **a)** $x \neq 0 \cap \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ \dfrac{1}{3}\right);$ **b)** $x \in \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right);$ **c)** $x \in [-6;\ 0) \cup (3;\ 4];$

d) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{21+3\sqrt{241}}{32}\right] \cup \left[\dfrac{3\sqrt{241}-21}{32};\ +\infty\right)$; **e)** $x \in (-2;\ 1) \cup [3;\ 5]$;

f) $x \in (2;\ 4]$; **g)** $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{5}{2}\right) \cup [-1;\ 1)$; **h)** $x \in \left(-2;\ \dfrac{1}{3}\right) \cup (7;\ +\infty)$.

20. Resuelva los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2-3x-10>0 \\ x^2-8x+7<0 \\ 7x^2+8x-1>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+x\le 0 \\ 12x^2-20x+5>0 \\ x^4-2x^2+1\le 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x^2-x-1}{x^2-4}\le 0 \\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|\ge 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right|<1 \\ \dfrac{4}{x-2}<0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ \dfrac{3x-21}{x^2+x+4}<0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2-4x+3<0 \\ 2x-4<0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x^2+2<5x \\ x^2\ge x \end{cases}$;

h) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2}<1 \\ \dfrac{2x+3}{3x-2}<2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{x^2+9x-20}{11x-x^2-30}\le -1 \\ x^2+18>5x \end{cases}$

j) $1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$

k) $\begin{cases} 2x+3>1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}>0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x}{3} \end{cases}$

m) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\le 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\ge 0 \end{cases}$

Resp: **a)** $\varnothing$; **b)** $x \in [-1;\ 0]$; **c)** $x \in [4;\ +\infty)$; **d)** $x \in (-0,3;\ 2)$.

21. Resuelva los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-\dfrac{148}{21} \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}>\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}>4-\dfrac{7-3x}{2} \\ 7(3x-6)+4(17-x)>11-5(x-3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (2x+3)(2x+1)(x-1)<0 \\ (x+5)(x+1)(1-2x)(x-3)>0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x^2+12x+35)(2x+1)(3-2x)\ge 0 \\ (x^2-2x-8)(2x-1)\ge 0 \end{cases}$

e) $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$

f) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^3(x^2-4)^2(x^2-9)^3(x^2+1)}{(1-3x)(x^2-x-6)(x^2-3x+16)}<0 \\ \dfrac{2x^2+x-16}{x^2+x}<1 \end{cases}$

22. Resuelva el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{4-|4-x|}{|x|+4}<4 \\ ||x-1|+x|>\sqrt{-x} \end{cases}$$

23. ¿Con qué valores de k la desigualdad $\dfrac{x-2k-1}{x-k}<0$ se verifica con toda x perteneciente a $[1;2]$?

24. ¿Con qué valores de k la desigualdad $(x-3k)(x-k-3)<0$ se verifica con toda x perteneciente a $[1;3]$?

25. ¿Con qué valores de k el sistema

$$\begin{cases} x^2 + (5k+2)x + 4k^2 + 2k < 0 \\ x^2 + k^2 = 4 \end{cases}$$

tiene, por lo menos, una solución?

26. ¿Con qué valores de k el sistema

$$\begin{cases} x^2 + (2-3k)x + 2k^2 - 2k < 0 \\ kx = 1 \end{cases}$$

tiene, por lo menos, una solución?

27. ¿Con qué valores de k el sistema

$$\begin{cases} x^2 - (3k+1)x + 2k^2 + 2k < 0 \\ x + k^2 = 0 \end{cases}$$

no tiene soluciones?

28. ¿Con qué valores de k el sistema

$$\begin{cases} x^2 + \left(1 - \frac{3}{2}k\right)x + \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} < 0 \\ x = k^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

no tiene soluciones?

29. ¿Con qué valores de k el sistema de desigualdades $-6 < \dfrac{2x^2 + kx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$ se verifica con toda x?

30. Si la temperatura en la escala Fahrenheit es F grados y utilizando la escala Celsius es C, entonces $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Cuál es el conjunto de valores de F si C está entre 10 y 20?
Resp: $\{F/50 < F < 68\}$

31. Cuando la temperatura del agua es mayor o igual a $100\circ$ Celsius, el agua hierve. Utilice la fórmula del problema anterior para determinar la temperatura Fahrenheit a la cual hierve el agua.

32. Un inversionista tiene invertidos \$ 8000 al 9 % y piensa invertir dinero adicional al 16 % con objeto de lograr un rendimiento de al menos 12 % de la inversión total. ¿Qué cantidad de dinero deberá ser invertida?
Resp: por lo menos \$ 6000.

33. Parte de \$ 20000 son invertidos al 9 % y el resto se invierten al 12 %. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que puede ser invertida al 12 % para tener un rédito anual de al menos \$ 2250 de las dos inversiones?

34. Un fabricante de lámparas vende únicamente a mayoristas en su sala de exposición. El gasto semanal total, incluyendo salarios, costos de planta y renta de la sala de exhibición, es de \$ 6000. Si cada lámpara se vende por \$ 168 y el material usado en su construcción cuesta \$ 44, ¿cuántas lámparas deberá hacer y vender cada semana para que el fabricante logre una ganancia?
Resp: por lo menos 49.

35. Si en un curso particular, un estudiante tiene un promedio de calificaciones, en cuatro exámenes, de menos de 90 pero no debajo de 80, el estudiante recibirá una calificación de B en el curso. Si las calificaciones del estudiante en los tres primeros exámenes son 87, 94 y 73, ¿qué calificación en el cuarto examen dará como resultado la calificación B?

36. Un platero piensa obtener una aleación que contenga al menos 72 % y cuando más 75 % de plata. Determine las cantidades máxima y mínima de una aleación a 80 % que debe ser combinada con una aleación de plata de 65 % para obtener 30 gr de la aleación requerida.
Resp: a lo más 20 gr y a lo menos 14 gr.

37. ¿Qué cantidad de alcohol puro debe ser agregado a 24 litros de una solución de alcohol al 20 % para obtener una mezcla que al menos tenga 30 % de alcohol?

38. Una empresa puede vender a \$ 100 por unidad todos los artículos de primera necesidad que produce. Si se fabrican x unidades por día, y el número de dólares en el costo total diario de producción es $x^2 + 20x + 700$. ¿Cuántas unidades deberán producirse diariamente de tal manera que la compañía garantice una ganancia?
Resp: más que 10 y menos que 70.

39. Una compañía que fabrica escritorios puede vender todos los que produce a \$ 400 cada uno. Si x escritorios se venden cada semana, entonces el número de dólares en el costo total de producción semanal es $2x^2 + 80x + 3000$. ¿Cuántos escritorios deberán construirse semanalmente para que el fabricante garantice una ganancia?

40. Un campo rectangular cercado está ubicado en la orilla de un río; el lado largo del río no requiere de cerca. El costo del material para la cerca es de \$ 8 por pie lineal para los dos lados opuestos con cerca y \$ 16 por pie lineal para el lado paralelo al río. Si el área del campo es de 12000 pie^2 y el costo de la cerca no debe exceder de \$ 3520, ¿cuáles son las restricciones en las dimensiones del campo?
Resp: Si x pies es la longitud de cualquier lado, $100 \leq x \leq 120$.

41. Una parcela rectangular de terreno será encerrada por una cerca, luego, dividida a la mitad por otro tipo de cerca. La cerca que divide a la mitad la parcela cuesta \$ 3 por pie lineal y la otra cerca tiene un costo de \$ 6 por pie lineal. Si el área del terreno es 1800 pie^2 y el

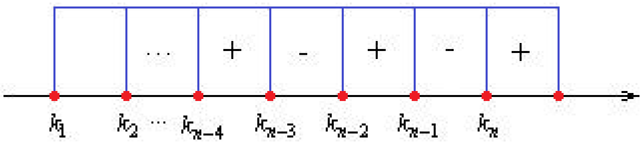
costo total de la cerca no debe ser mayor que \$ 2310, ¿cuáles son las restricciones en las dimensiones del terreno?

7.6. Desigualdades de orden superior

Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$(x-k_1)(x-k_2)...(x-k_{n-1})(x-k_n)>0$$

donde k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n son ciertos números fijos, entre los cuales no hay iguales, y, además, tales que $k_1<k_2<...<k_{n-1}<k_n$.



Examinemos el polinomio

$$p(x)=(x-k_1)(x-k_2)...(x-k_{n-1})(x-k_n)$$

En virtud de la observación hecha más arriba resulta obvio que para cualquier número x_0 tal que $x_0>k_n$, el valor numérico correspondiente de todo factor en el producto $(x-k_1)(x-k_2)...(x-k_{n-1})(x-k_n)$ es positivo y, por esta razón, el correspondiente valor numérico $p(x_0)$ del polinomio $p(x)$ es también positivo. Para cualquier número x_1, elegido del intervalo $(k_{n-1};k_n)$, el valor numérico correspondiente del último factor es negativo, y el valor numérico correspondiente de cualquiera de los factores restantes es positivo, por lo cual el número $p(x_1)$ es negativo; análogamente, para todo número x_2, perteneciente al intervalo $(k_{n-2};k_{n-1})$, el número $p(x_2)$ es positivo, etc.

Precisamente en este razonamiento se basa el método de intervalos que consiste en lo siguiente: en la recta numérica se marcan los números k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n; en el intervalo, que se encuentra a la derecha del número mayor, se pone el signo más, en el intervalo siguiente, que va de derecha a izquierda, se pone el signo menos, luego, el signo más, luego, el signo menos, etc. Entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad dada será la unión de todos los intervalos que llevan el signo más.

El método de intervalos permite resolver aquellas desigualdades algebraicas que pueden reducirse, mediante una sucesión de pasos equivalentes, a las desigualdades del tipo

$$(x-k_1)(x-k_2)...(x-k_{n-1})(x-k_n)>0$$

Algunas desigualdades algebraicas de grados superiores a dos se reducen, mediante una sucesión de pasos equivalentes, a la forma

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_{n-1})^{k_{n-1}}(x-a_n)^{k_n}>0$$

donde k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n son números naturales fijos, y a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, números reales fijos, entre los cuales no hay iguales, y tales que $a_1<a_2<...<a_{n-1}<a_n$, indiquemos que si al

menos uno de los números $k_i \geq 2$, entonces el método de intervalos aducido anteriormente no puede ser aplicado para la resolución de esta desigualdad. Entonces, las desigualdades de este tipo se resuelven por el así llamado método de intervalos generalizado. Examinemos el polinomio

$$p(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}...(x - a_{n-1})^{k_{n-1}}(x - a_n)^{k_n} > 0$$

Es evidente que para cualquier número x_0 tal que $x_0 > a_n$, el valor correspondiente de todo factor en el producto, es positivo, debido a lo cual el valor numérico $p(x_0)$ del polinomio $p(x)$ es también positivo. Para cualquier número x_1, elegido dentro del intervalo $(a_{n-1}; a_n)$, el valor numérico correspondiente de todo factor, a excepción del último, es positivo; el valor numérico correspondiente del último factor es positivo, si k_n es un número par, y negativo, si k_n es un número impar. Por eso, el número $p(x_1)$ es positivo, si k_n es un número par, y el número $p(x_1)$ es negativo, si k_n es impar.

En estos casos suele decirse, habitualmente, que el polinomio $p(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto a_n, si k_n es un número impar, y no cambia de signo, si k_n es un número par. Análogamente se muestra que si se conoce el signo del polinomio $p(x)$ en el intervalo $(a_i; a_{i+1})$, entonces en el intervalo $(a_{i-1}; a_i)$ el signo se determina según la siguiente regla: el polinomio $p(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto a_i, si k_i es un número impar, y no cambia de signo, si k_i es un número par.

Precisamente en estos razonamientos está basado el método de intervalos generalizado: en el eje numérico se marcan los números a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n; en el intervalo dispuesto a la derecha del número mayor, es decir, a la derecha de a_n, se pone el signo más en el intervalo que sigue tras el primero de derecha a izquierda se pone el signo más, si k_n es un número par, y el signo menos, si k_n es un número impar; en el siguiente intervalo de derecha a izquierda se pone el signo, rigiéndose por la siguiente regla: el polinomio $p(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto a_{n-1}, si k_{n-1} es un número impar, y conserva el signo invariable, si k_{n-1} es un número par; a continuación se examina el intervalo siguiente que va de derecha a izquierda y se pone en él el signo, rigiéndose por la misma regla; de esta manera se analizan todos los intervalos. La solución de la desigualdad será la unión de todos los intervalos en los cuales se ha puesto el signo más.

Pasemos ahora a la resolución de las desigualdades no estrictas $p(x) \geq 0$ o $p(x) \leq 0$. Si cierto número x_0 es la solución de la desigualdad $p(x) \geq 0$, se verificará la desigualdad numérica $p(x_0) \geq 0$. Entonces, debido a la definición del signo no estricto de una desigualdad, se verifica o bien la igualdad numérica $p(x_0) = 0$, o bien la desigualdad $p(x_0) > 0$. En otras palabras, si el número x_0 es la solución de la desigualdad $p(x) \geq 0$, entonces dicho número es o bien la solución de la ecuación $p(x) = 0$, o bien, de la desigualdad $p(x) > 0$. Esto puede decirse sobre cualquier solución de la desigualdad $p(x) \geq 0$. Del modo análogo se muestra que toda solución de la desigualdad $p(x) > 0$ y toda solución de la ecuación $p(x) = 0$ es también la solución de la desigualdad $p(x) \geq 0$.

De este modo, el conjunto de soluciones de la desigualdad no estricta $p(x) \geq 0$ representa la unión de dos conjuntos: el de todas las soluciones de la desigualdad estricta $p(x) > 0$ y el de todas las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$. Análogamente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad no estricta $p(x) \leq 0$ es la unión de dos conjuntos: el de todas las soluciones de la desigualdad estricta $p(x) < 0$ y el de todas las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

En esto precisamente está basado el principio de resolución de las desigualdades no estrictas. Se resuelven primeramente la desigualdad estricta y la ecuación correspondiente después de lo cual se reúnen los conjuntos de soluciones de la desigualdad estricta y de la ecuación; la unión de dichos conjuntos es precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad no estricta.

Ejemplo 7.13 *Resuelva la inecuación*

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}>\frac{8}{x^2-1}$$

Solución

$$\frac{x(x+1)-2(x-1)}{x^2-1}>\frac{8}{x^2-1} \;\Rightarrow\; \frac{x(x+1)-2(x-1)}{x^2-1}-\frac{8}{x^2-1}>0$$

$$x^2-x-6>0 \;\Rightarrow\; (x+2)(x-3)>0$$

Por tanto la solución de la inecuación es: $x\in(-\infty;\ -2)\cup(3;\ +\infty)$.

Ejemplo 7.14 *Resuelva la inecuación*

$$\frac{(x+5)(x^2-1)}{x(x+3)^2\sqrt{49-x^2}}>0$$

Solución
Estableciendo las condiciones del problema, tenemos:

$$\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x^2-1)}{x(x+3)^2}>0\\ 49-x^2>0\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\dfrac{(x+5)(x^2-1)}{x(x+3)^2}>0\\ x^2-49<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)(x+1)}{x(x+3)^2}>0\\ (x+7)(x-7)<0\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}x\in(-\infty;\ -5)\cup(-1;\ 0)\cup(1;\ +\infty)\\ x\in(-7;\ 7)\end{cases}$$

Hacemos la intersección entre estas dos soluciones y obtenemos la solución general de la inecuación: $x\in(-7;\ -5)\cup(-1;\ 0)\cup(1;\ 7)$

7.7. Tarea

1. Resuelva las inecuaciones:
   a) $x^4-7x^3+8x^2+28x-48\le x^2-5x+6$;
   b) $x^4+7x^3+x^2-63x-90\le x^2+2x-15$;
   c) $(x^2-16x)^2-63\ge 2(x^2-16x)$;
   d) $(2x^2+2x)(x^2-2x+1)(3x^3+7x-10)>0$;
   e) $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-x-2)\le 0$;
   f) $x^4-x^3+x-1\ge x^2-1$;
   g) $x^5-x^3-x^2+1\le x^3+1$;
   h) $x^2+2x+7\ge(4+2x+x^2)(3+2x+x^2)$;
   i) $x(x^2+3x-4)>7x^3-18x^2+6x+5$;
   j) $(3x^2-4x+1)(4x^4-5x^3+x^2)\le 0$;
   k) $(2x^2-3x-14)(2x^2+11x+14)<0$;
   l) $(x^2+4x-45)(3x^2-14x-5)(x+1)\le 0$;
   m) $(3x-x^2)(x+4x^2+5)\le 2(x+4x^2+5)$;
   n) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6\ge x^2+x-2$;
   o) $(x^2+10x+25)(25-x^2)>0$;
   p) $2x^4-5x^3+5x-2\ge 2x^2-5x+2$;

q) $(3x^3 - 24)(2x^2 + 6x - 20) \geq 0$;
r) $(4 - 2x^2 - x^4)(x^2 - 2x + 1) < 0$;
s) $(x^2 - 4x - 12)(x^3 - 7x - 6) \geq 0$;
t) $(x + 4)(x + 2)^3(x - 1)(2 - x)^2(x^2 - 3x + 5) > 0$;
u) $(9 - x^2)(x^2 - 2x - 3)(x + 8) \geq 0$;
v) $(3x - 2)(x - 1) < 27 + 3(x - 3)^2 - 6(3x + 1)$;
w) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 8 \geq 0$;
x) $(6x^3 - x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 10x + 10) < 0$;
y) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)(1 - x^2) \leq 0$;
z) $(5x^2 - x - 4)(x^3 - 1)(x - 10) > 0$.

Resp: **a)** $x \in [3;\ 1 + \sqrt{10}] \cup [1 - \sqrt{10};\ 2]$;
b) $x \in \left[-5;\ -\dfrac{\sqrt{5} + 5}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2};\ 3\right]$;
c) $x \in (-\infty;\ 8 - \sqrt{73}] \cup [8 - \sqrt{57};\ 8 + \sqrt{57}] \cup [8 + \sqrt{73};\ +\infty)$;
d) $x \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$;
e) $x \in [-2;\ -1] \cup \{2\}$;
f) $x \in (-\infty;\ -1] \cup [0;\ +\infty)$;
g) $x \in \left[\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right] \cup (-\infty;\ -1]$;
h) $x = -1$;
i) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{15 - \sqrt{345}}{12}\right) \cup \left(1;\ \dfrac{15 + \sqrt{345}}{12}\right)$;
j) $x \in \left[\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \{0, 1\}$;
k) $x \in \left(-\dfrac{7}{2};\ \dfrac{7}{2}\right) - \{-2\}$;
l) $x \in (-\infty;\ -9] \cup \left[-1;\ -\dfrac{1}{3}\right] \cup \{5\}$;
m) $x \in (-\infty;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$;
n) $x \in (-\infty;\ -2 - \sqrt{2}] \cup [-2;\ -2 + \sqrt{2}] \cup [1;\ +\infty)$;
o) $x \in (-5;\ 5)$;
p) $x \in (-\infty;\ -\sqrt{\ }] \cup \left[\dfrac{1}{2};\ \sqrt{2}\right] \cup [2;\ +\infty)$;
q) $x \in [-5;\ +\infty)$;
r) $x \in (-\infty;\ -\sqrt{\sqrt{5} - 1}) \cup (\sqrt{\sqrt{5} - 1};\ +\infty)$;
s) $x \in [-1;\ 3] \cup [6;\ +\infty) \cup \{-2\}$;
t) $x \in (-4;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$;
u) $x \in (-\infty;\ -8] \cup [-3;\ -1] \cup \{3\}$;
v) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{46}{31}\right)$;
w) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{7 - \sqrt{17}}{2}\right] \cup [2;\ 5] \cup \left[\dfrac{7 + \sqrt{17}}{2};\ +\infty\right)$;
x) $x \in \left(-1;\ -\dfrac{1}{2}\right)$;
y) $x \in (-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty) \cup \{1, 2\}$;

z) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{4}{5}\right) \cup (10;\ +\infty)$.

2. Resuelva las inecuaciones:

a) $\dfrac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7} > 0$;

b) $\dfrac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)} < 0$;

c) $2x^3 - 5x^2 + 2x \leq 0$;

d) $\dfrac{x^2-3x-18}{13x-x^2-42} \geq 0$;

e) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$;

f) $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3} \leq 0$;

g) $\dfrac{3x+4}{x^2-3x+5} < 0$;

3. Resuelva el sistema de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 5x^2+6x-8<0 \\ 5x^2+6x+8>0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3-x \leq 0,5+2x \\ 2+x > 7x+1,5 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2+y^2 \geq 4 \\ x-1>0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-1 \geq 1-3x \\ 3x+2 \leq 7 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 4(1-2x) < 3(1+3x) \\ 1-7x \geq -6x \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2-4<0 \\ 3x^2+2x-5 \geq 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 4x^2-9<0 \\ x-15 \geq 0 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ |x|+|y|<1 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-255<0 \\ 3x+5y-15<0 \\ y+2>0 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} x^2+4y^2-16>0 \\ y+3>0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0 \\ 4x+3y-12<0 \end{cases}$;

l) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0 \\ 2x-y-6<0 \\ 3x+y+12>0 \end{cases}$;

m) $\begin{cases} y^2-10x<0 \\ 5x-3y-15<0 \\ y-2<0 \end{cases}$;

n) $\begin{cases} x^2+8y<0 \\ 2x+3y+6<0 \\ 16x^2-9y^2 \geq 144 \end{cases}$;

o) $\begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x} < 1 \\ x^2 < 64 \end{cases}$;

p) $\begin{cases} \frac{3x-6}{x+2} \geq 0 \\ (x^4-5x^3+6x^2)(1-x^2) \geq 0 \end{cases}$;

q) $\begin{cases} x^5 \geq 100x^3 \\ \frac{(x+9)(5x-x^2-18)}{x^2-18x+48} \geq 0 \end{cases}$.

Resp: **a)** $-2 < x < \dfrac{4}{5}$; **d)** $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{3}$; **e)** $\dfrac{1}{17} < x \leq 1$;
f) $-2 < x \leq -\dfrac{5}{2},\ 1 \leq x < 2$.

4. Resuelva el sistema de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y<6 \\ y<5 \\ x>-1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y-x\le 2 \\ x+5y\ge 10 \\ x+2y\le 16 \\ 2x+y\le 20 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y\le 9 \\ x-y\le 0 \\ x+2y\le 16 \\ x\ge 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 5x+2y-10\ge 0 \\ x-y-2\le 0 \\ 3x+4y\le 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y\le 120 \\ 3y-x\le 0 \\ x\le 100 \\ y\ge 100 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x+2y\ge 80 \\ 3x+2y\ge 160 \\ x+y\le 70 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 2x+y\le 18 \\ 2x+3y\le 26 \\ x+y\le 16 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

5. Resuelva las inecuaciones:

a) $\dfrac{(x+3)(3x-4)}{(x-1)^2(x+5)(x+3)^2}\le 0;$

b) $\dfrac{\sqrt{100-x^2}(x+4)(x+3)^2}{x^2(x-2)}<0;$

c) $\dfrac{x^3+6x^2+5x-12}{(5x^2-8x-13)^3(x-2)^2(x-1)}<0;$

d) $\dfrac{\sqrt{x+7}(x+5)(x-1)^2}{(3-x^2)(x-6)(x-5)}\ge 0;$

e) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}\ge 0;$

f) $\dfrac{(x^2-5x+2)(x+3)^2(x-2)^2}{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}>0;$

g) $\dfrac{(x+2)(x^2-x+3)}{x(2x+1)(x-5)}\ge 0;$

h) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}\le\dfrac{6}{x-1}.$

Resp: a) $\left(x\neq\cap-3<x\le\dfrac{4}{3}\right)\cup x<-5;$

b) $x\neq-3\cap x\neq 0\cap-4<x<2;$

c) $\left(x\neq 2\cap-1<x<\dfrac{13}{5}\right)\cup-4<x<-3;$

d) $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\cup 5<x<6\cup-7\le x\le-5;$

e) $x<-2\cup\sqrt{2}\le x<2\cup-\sqrt{2}\le x<-1\cup 0\le x<1;$

f) $(x\neq-3\cap x<-2)\cup-1<x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\cup x>\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};$

g) $-\dfrac{1}{2}<x<0\cup x\le-2\cup x>5;$

h) $x<-2\cup-\dfrac{5}{4}\le x<-1\cup 1<x\le 5.$

Capítulo 8

Funciones algebraicas

8.1. Funciones

Las funciones juegan un papel muy importante en matemática. Una precisa definición es la siguiente.

Definición 8.1 Función
Sea f una relación de A en B. Entonces f es una función de A en B, denotado $f : A \to B$ y se lee (f es una función de A en B) si y sólo si
a) $Dom(f) = A$.
b) $\forall\, x \in A, \forall\, y, z \in B, [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f] \to y = z$.

En palabras, lo anterior dice que si f es una relación de A en B tal que para cada $x \in A$ existe exactamente un $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, entonces f es una función. Es decir, una función es una relación en la cual no hay dos parejas ordenadas que tengan el mismo primer miembro y diferentes segundos miembros. La condición a) garantiza que para cada $x \in A$ existe al menos un tal y y la condición b) garantiza que hay a lo más uno. Así, tomados juntos, hay exactamente uno.

Esta definición requiere que para cualquier valor de x del dominio exista uno y sólo un correspondiente valor de y. En contraste, una relación no tiene esta estipulación y puede tener más de un valor en la imagen correspondiente a un valor del dominio. Así vemos que una función es una relación, aunque una relación no necesariamente es una función.

Si f es una función de A en B entonces la propiedad funcional de cada $x \in A$ relacionado a exactamente un $y \in B$ permite el uso de la notación funcional $y = f(x)$.

Como ejemplos de relaciones que son funciones y algunas que no lo son, consideremos los siguientes:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad f = \{(1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5)\}$$

$$g = \{(1; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 5)\}, \quad h = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3)\}.$$

Entonces f, g y h son relaciones de A en B, pero sólo f es una función; g no es función ya que $(1,\ 2)$ y $(1,\ 3)$ son elementos de g. Tampoco h es una función ya que $Dom(h) = \{1, 2, 3\} \neq A$. Observemos que f tiene una simple forma y puede ser descrita por una fórmula: $\forall\, x \in A$, $f(x) = x + 1$.

La mayoría de las funciones conocidas en cálculo son dadas por una fórmula. Sin embargo esto no es necesario y, en general en matemática, las funciones no están dadas por fórmulas.

Usaremos las siguientes notaciones y nombres cuando trabajemos con funciones.

Sea $f : A \to B$ y $(x, y) \in f$ entonces escribimos $y = f(x)$.

Observe que el nombre de la función es f y que $f(x)$ no es el nombre de la función sino un elemento de B.

Si $y = f(x)$ entonces decimos que y es la imagen de x y que x es una preimagen de y.

Observe que se usa *la* cuando se habla de imagen y se usa *una* cuando se habla de preimagenes ya que un elemento de B puede tener varios elementos de A relacionados. Ya que f es una relación se puede hablar de su dominio e imagen, componer f con otras relaciones y analizar su inversa. Note que aunque $Dom(f) = A$, no necesariamente es $Im(f) = B$. De esta manera es conveniente tener también un nombre para B. Usualmente se le denomina codominio de f.

El siguiente resultado es útil para determinar cuando dos funciones son iguales.

Teorema 8.1 *Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$. Entonces $f = g$ si y solo si $\forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$.*

Existen ciertas propiedades que las funciones pueden o no tener. Si estas propiedades son usadas frecuentemente entonces requieren nombres. Algunos de estos son dados en la siguiente definición.

Definición 8.2 Inyectividad
Sea $f : A \to B$. Entonces:
a) *Se dice que f es uno a uno (o f es inyectiva) si y sólo si $\forall\, w, z \in A,\ f(w) = f(z)$ implica $w = z$.*
b) *Se dice que f es sobre (o f es sobreyectiva) si y sólo si $Im(f) = B$.*
c) *Se dice que f es biyectiva (o biunívoca) si y sólo si f es a la vez uno a uno y sobre.*

Recordemos que ya que funciones son relaciones, ellas tienen inversas que son relaciones. Así, podemos hablar de la inversa de cualquier función, pero no hay razón para esperar que esta inversa sea también una función. En este sentido las funciones biyectivas son importantes, ya que ellas son exactamente aquellas funciones cuyas inversas son también funciones.

Teorema 8.2 *Sea $f : A \to B$ una función. Entonces $f^{-1} : B \to A$ es una función si y sólo si f es biyectiva.*

Se observa que el hecho que f es 1 - 1 implica que f^{-1} tiene la propiedad de función y que f^{-1} sobre implica que $Dom(f^{-1}) = B$. Así, si $f : A \to B$ es tal que f es 1 - 1 pero no sobre B, entonces f^{-1} es una función de $Im(f)$ en A pero no es una función de B en A.

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ entonces $(g \circ f) : A \to C$ denota la composición de f y g.

Si $(g \circ f)(x) = z$, entonces $(x, z) \in (g \circ f)$, lo cual significa que existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ y $(y, z) \in g$. Luego, $f(x) = y$ y $g(y) = z$. Por lo tanto, $z = g(y) = g(f(x))$ o $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, que es la notación usual. Ya que las funciones son relaciones se pueden componer y, en consecuencia, los resultados para relaciones valen para funciones. Así, si f, g son funciones con dominios e imágenes apropiadas, entonces $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ aunque $(g \circ f)^{-1}$, f^{-1} y g^{-1} pueden no ser funciones.

Teorema 8.3 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f) : A \to C$ es biyectiva.*

Para mostrar que f es 1 - 1 se debe probar que distintos elementos en el dominio tienen distintas imágenes y para mostrar que f es sobre se debe probar que cada elemento de B tiene una preimagen.

Ejemplo 8.1 *Demuestre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es biyectiva.*
Solución
Primero una prueba directa que f es 1-1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $f(x) = f(y)$. Entonces $ax+b = ay+b$, lo cual implica que $ax = ay$. Ya que $a \neq 0$, se tiene $x = y$ y por lo tanto f es 1-1.
Una prueba contrapositiva podría ser: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$. Entonces ya que $a \neq 0$, $ax \neq ay$. Luego se tiene $ax + b \neq ay + b$ y así $f(x) \neq f(y)$.
Para mostrar que f es sobre, sea $z \in \mathbb{R}$. Entonces $\frac{z-b}{a}$ es también un elemento de $\mathbb{R}$, ya que $a \neq 0$ y

$$f\left(\frac{z-b}{a}\right) = a\left(\frac{z-b}{a}\right) + b = z - b + b = z$$

luego f es sobreyectiva. Observe que la elección de $\frac{z-b}{a}$ fue el resultado de resolver la ecuación $f(x) = ax + b = z$ para x.

Teorema 8.4 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f)^{-1} : C \to A$ y $\forall\, x \in C$*

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)).$$

Observemos que la relación identidad en A, I_A, es una función de A en A que llamaremos función identidad. Usando una notación funcional, $I_A(x) = x$, $\forall\, x \in A$.

Teorema 8.5 *Sea $f : A \to B$. Entonces*
a) $f \circ I_A = f$.
b) $I_B \circ f = f$.
c) *Si f es biyectiva entonces $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$ (o $\forall\, x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$ y $\forall\, x \in B, f(f^{-1}(x)) = x$).*

Definición 8.3 Imagen de una función
Sea $f : A \to B$. Si $C \subseteq A$ entonces se define $f(C) = \{f(x)/x \in C\}$. Si $D \subseteq B$ entonces $f^{-1}(D) = \{x/f(x) \in D\}$. $f(C)$ se llama la imagen de C y $f^{-1}(D)$ la preimagen de D.

Ejemplo 8.2 Sea $f : A \to B$ donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y f es dada por $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 5$. Entonces $f(\{1, 3\}) = \{1, 5\}$, $f(\{1, 2\}) = \{1\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$.

Teorema 8.6 *Sea $f : A \to B$ y sean $C \subseteq D \subseteq B$. Entonces $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.*

Un elemento de una relación es una pareja ordenada de números reales y las coordenadas de un punto en un plano coordenado también es una pareja ordenada de números reales. Esto nos conduce a asociar un punto $P(x, y)$ de un plano coordenado con el correspondiente elemento (x, y) de la relación.

Definición 8.4 Gráfica de una relación
La gráfica de una relación es el conjunto de puntos de un plano coordenado cuyas coordenadas son parejas ordenadas de una relación.

Ejemplo 8.3 *Dibuje la gráfica de la relación*

$$f = \{(-2,-1),(3,3),(1,-2),(-2,1),(1,2)\}$$

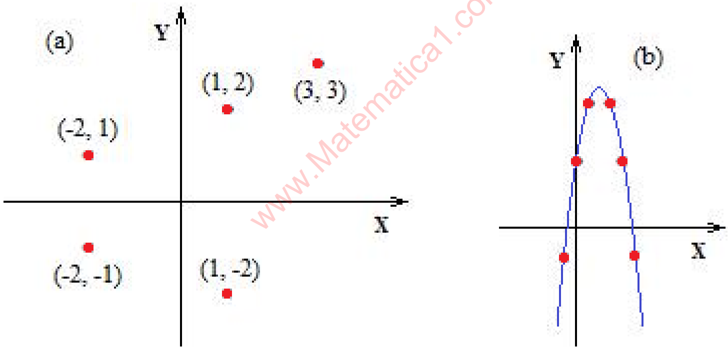
Solución
La gráfica de la relación consiste de los puntos marcados en la figura. Esta relación no es una función, puesto que (-2, -1) y (-2, 1) son dos parejas ordenadas de f que tienen el mismo primer elemento aunque los segundos elementos son diferentes.

Definición 8.5 Gráfica de una ecuación
La gráfica de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos del plano coordenado cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Ejemplo 8.4 *Grafique la relación*

$$f = \{(x,y)/y = 2 + 3x - x^2\}.$$

Solución
Para encontrar las coordenadas de los puntos de la grafica, usamos la ecuación dada. Si se asigna un valor a x, entonces se obtiene el único valor de y. Así si $x = 0$, entonces $y = 2$. En consecuencia (0, 2) son las coordenadas de un punto de la gráfica deseada.



El término función suele utilizarse en la vida diaria, como cuando se dice que la conducta de los precios recientemente ha sido una función de los últimos escrutinios. El concepto de función aparece también en las matemáticas y es, de hecho, uno de los conceptos más importantes de esta ciencia.

Definición 8.6 Función
Una función es una regla que asocia con cada elemento de algún conjunto D no vacío uno y sólo un elemento de otro conjunto C.

El conjunto D que aparece en la definición de función recibe el nombre de dominio, y el conjunto C recibe el nombre de codominio o recorrido. Supóngase que $x \in D$ es un elemento del dominio. El elemento $y \in C$ asociado con x por la función reciben el nombre de imagen de x. La característica esencial de una función es que cada elemento $x \in D$ tiene una y sólo una imagen en C. De este modo, no puede haber dos elementos diferentes de C asociados con un solo elemento x del dominio. No tiene que ser cierto que todo elemento de C es la imagen de algún elemento de D. Puede haber elementos en C que no sean imagen de ningún elemento de D. Cabe hacer mención de que no todos los matemáticos definen el codominio como se ha hecho aquí. Algunos definen el recorrido como el subconjunto de C que contiene todas las imágenes de los elementos de D. En esta terminología, C no tiene nombre especial. La terminología anterior y la utilizada en este texto difieren solamente si C tiene uno o más elementos que no son imagen de algún elemento de D. En este texto trabajaremos con un tipo de funciones llamadas funciones reales de una variable real.

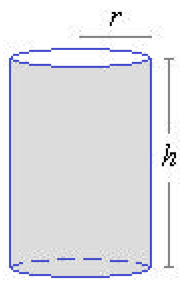
Definición 8.7 Dominio de una función
Se llama dominio de una función, el conjunto de los valores reales del argumento en los cuales la función toma valores reales.

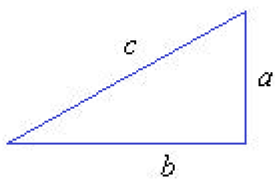
Definición 8.8 Función real de variable real
Una función real de una variable real es una regla que asocia a cada número real x de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, un único número real $f(x)$, llamado imagen de x bajo f. Una función tal se denota con $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si x es cualquier elemento del dominio D, existe entonces un elemento y del codominio C, asociado con x bajo la función f. Para indicar lo anterior puede escribirse $y = f(x)$ que se lee y es la imagen de x bajo la función f. A la derecha se escribe el símbolo de la función y luego, entre paréntesis, el símbolo que representa el elemento típico de D. A la izquierda se escribe el símbolo que designa la imagen del elemento de C. Los símbolos están unidos por el símbolo de igualdad. Este simbolismo suele utilizarse para designar a toda la función f, de modo que puede hablarse de la función $y = f(x)$. El símbolo $y = f(x)$ se utiliza entonces con dos propósitos diferentes. Designa la función completa f y también que y es la imagen de algún punto x en particular. Este doble uso normalmente no causa confusión, pero en ciertos casos puede suceder, y por lo tanto debe acudirse a algún símbolo especial para designar toda la función.

Ejemplo 8.5 *Escribir la función que exprese la dependencia entre el radio r de un cilindro y su altura h siendo el volumen dado $V = 2$.*
Solución
Sabemos que el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$. Como es volumen es dado y es igual a 2, entonces $2 = \pi r^2 h$ despejamos r y obtenemos

$$r^2 = \frac{2}{\pi h} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2}{\pi h}}.$$





Ejemplo 8.6 *Expresar la dependencia entre la longitud b de un cateto de un triángulo rectángulo y la longitud a de otro lado, siendo la hipotenusa constante e igual a $c = 3$.*
Solución
Por el grafico tenemos que $c^2 = a^2 + b^2$, como $c = 3$, entonces $9 = a^2 + b^2$. Despejando b, obtenemos

$$b^2 = 9 - a^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{9 - a^2}.$$

Ejemplo 8.7 *Una torre tiene la siguiente forma: Un cono circular recto truncado cuyos radios de base son $2R$ y R y cuya altura es R, sostiene un cilindro de radio R y de altura $2R$. Este último sostiene, a su vez, una semiesfera de radio R. Exprese el área S de la sección transversal de la torre como función de la distancia x que media entre la sección y la base inferior del cono.*

Solución

Sabemos que

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2}, \quad S_2 = 4R^2, \quad S_3 = 3R^2.$$

Como la altura total es $h_T = 2x = 4R$, entonces

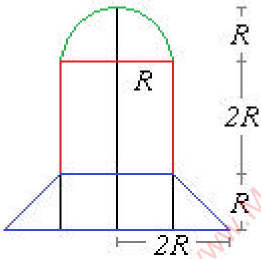
$$R = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{x^2}{4}$$

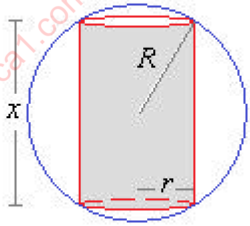
El área total es

$$S_t = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi R^2}{2} + 4R^2 + 3R^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 7\right) R^2$$

Por tanto el área total es

$$S_T = \left(\frac{\pi}{2} + 7\right) \frac{x^2}{4}.$$





Ejemplo 8.8 *Una esfera de radio R lleva inscrito un cilindro. Hallar la dependencia funcional entre el volumen V del cilindro y su altura x.*

Solución

Sabemos que el volumen del cono es $V_C = \pi r^2 x$, haciendo una relación de triángulos, tenemos que

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = r^2 + \frac{x^2}{4}$$

despejando el radio del cilindro, tenemos

$$r^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}$$

De esta manera obtenemos el volumen del cilindro en función de la altura x:

$$V_C = \pi \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right) x.$$

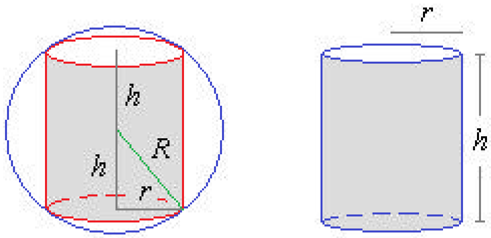
Ejemplo 8.9 *Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera si la circunferencia de las bases del cilindro está sobre la superficie de la esfera. Si la esfera tiene radio R, expresar el volumen del cilindro en función del radio r de su base.*

Solución
La figura indica que $2h$ es la altura del cilindro, entonces

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

y el volumen pedido es

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 2h \quad \Rightarrow \quad V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$



Ejemplo 8.10 *Una lata cilíndrica cerrada tiene radio r y altura h:*
a) *Si el área de la superficie S de la lata es una constante, exprese el volumen V de la lata en función de S y r.*
b) *Si el volumen de la lata es una constante, exprese el área de la superficie S en términos de V y r.*
Solución
a) Sabemos que la superficie del cilindro se calcula con la fórmula $S = 2\pi rh$. El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$. Para expresar el volumen del cilindro en función de r y S, hacemos que

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi rh$$

Reemplazando la fórmula de la superficie en el volumen, obtenemos

$$V = \frac{1}{2} rS$$

b) Del inciso anterior, despejamos S

$$V = \frac{1}{2} rS \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2V}{r}.$$

La dependencia funcional de cierta magnitud y en función de otra x significa que a cada valor de x corresponde un valor determinado de y. En estas condiciones, la magnitud x es llamada variable independiente e y, función de esta variable. En determinadas ocasiones x es llamada argumento de la función.

Así pues, el dominio de existencia de una función se determina por la propia ley que define la función, mientras que el dominio de definición de la misma se prefija por las condiciones o por el sentido del problema a resolver, es decir, el dominio de definición de una función lo puede constituir cualquier parte del dominio de existencia de la función, o bien los dominios mencionados pueden coincidir completamente. De esta manera, siempre cuando se diga que está dada una función $y = f(x)$, se considera que ya está prefijado también su dominio de definición D; este último o bien se indica explícitamente o bien existe el dominio de existencia de dicha función. En lo que se refiere al codominio de la función $y = f(x)$, éste se calcula en base al dominio de definición ya prefijado. El dominio de $y = f(x)$ puede visualizarse proyectando la gráfica sobre el eje de las X; la proyección de la gráfica sobre el eje de las Y nos da el codominio.

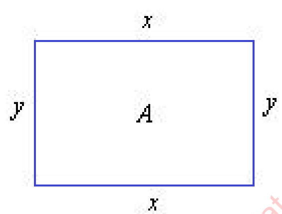
Ejemplo 8.11 *Escriba el área A de un rectángulo de 140 m de perímetro como función de la longitud x de la base.*

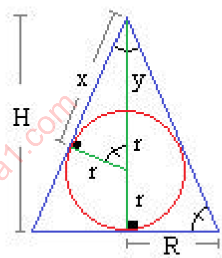
Solución

Como se indica en la figura, sea y la altura del rectángulo. Entonces, su área estará dada por $A = xy$. Para eliminar y y obtener A como función de x sola, usamos el hecho de que el perímetro del rectángulo es $2x + 2y = 140$, así que $y = 70 - x$. Por lo tanto, la ecuación del área produce $A = x(70 - x)$.

Además de esta última fórmula, debemos especificar también el dominio de la función A. Sólo los valores $x > 0$ producirán rectángulos efectivos. Por razones similares, tendremos la restricción $y \geq 0$. Puesto que $y = 70 - x$, se sigue que $x \leq 70$. Así es que la definición completa de nuestra área es

$$A(x) = x(70 - x), \quad 0 \leq x \leq 70.$$





Ejemplo 8.12 *A una esfera de radio r se circunscribe un cono. Encuentre la dependencia entre el volumen V de dicho cono y su altura; indique el dominio de la función obtenida.*

Solución

Por el gráfico podemos ver que

$$H = 2r + y \quad \Rightarrow \quad y = H - 2r$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$(y + r)^2 = x^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{(y + r)^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{H^2 2Hr}$$

Haciendo una relación de triángulos obtenemos

$$\frac{x}{2r + y} = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{r(2r + y)}{x}$$

Sabemos que el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Reemplazando en esta fórmula, los valores obtenidos anteriormente, tenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{rH}{\sqrt{H^2 - 2Hr}} \right)^2 H \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3} \frac{r^2 H^3}{H^2 - 2Hr} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 H^2}{H - 2r}$$

Esta función está definida, cuando $H - 2r \neq 0$. De esta forma podemos deducir que el dominio de la función es $H \in \mathbb{R}^+ - \{2r\}$.

Ejemplo 8.13 *Una esfera de radio R lleva inscrito un cono recto. Hallar la dependencia funcional entre el área de la superficie lateral S del cono y su generatriz x. Indique el dominio de esta función.*

Solución

Haciendo la relación de triángulos, obtenemos

$$\frac{\frac{x}{2}}{R+h} = \frac{R}{x} = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2(R+h)} = \frac{R}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{x^2}{2R} - R$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos

$$x^2 = (R+h)^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \left(R + \frac{x^2}{2R} - R\right)^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4R^2}}$$

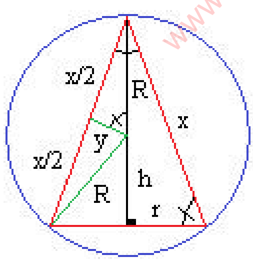
El área de la superficie lateral del cono en función de su generatriz x es $A = \pi r x$. Reemplazando los valores encontrados anteriormente, tenemos

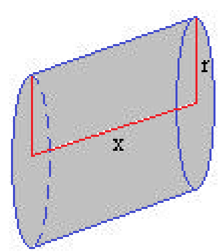
$$A = \pi x \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4R^2}} \quad \Rightarrow \quad A = \pi x \sqrt{\frac{4R^2x^2 - x^4}{4R^2}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi x}{2R}\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Esta función está definida si

$$\begin{cases} R \neq 0 \\ 4R^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R \neq 0 \\ (x-2R)(x+2R) \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R \neq 0 \\ x \in [-2R;\ 2R] \end{cases}$$

Por tanto el dominio de la función es $x \in (0;\ 2R]$.





Ejemplo 8.14 *Un rectángulo cuyo perímetro fijo es 36 gira en torno a uno de sus lados, S, para generar un cilindro circular recto. Exprese el volumen V de este cilindro en función de la longitud x del lado S.*

Solución

El perímetro del rectángulo está dado por $P = 2x + 2r$. Como el perímetro es igual a 36, entonces

$$36 = 2x + 2r \quad \Rightarrow \quad r = 18 - x$$

El volumen del cilindro está dado por $V = \pi r^2 x$. Reemplazando r en la fórmula del volumen, obtenemos

$$V = \pi(18-x)^2 x$$

Ejemplo 8.15 *Para estudiar la tasa a la que aprenden los animales, un estudiante de psicología realizó un experimento en el que de modo repetido se enviaba una rata a través de un laberinto de laboratorio. Suponga que el tiempo requerido por la rata para atravesar el laberinto en la n-ésima prueba era aproximadamente $f(n) = 3 + \frac{12}{n}$ minutos:*

a) *¿Cuál es el dominio de la función?*

b) *¿Para qué valores de n tiene significado $f(n)$ en el contexto del experimento psicológico?*

c) *¿Cuánto tiempo se tomó la rata para atravesar el laberinto en la tercera prueba?*

d) *¿En qué prueba atravesó la rata por primera vez el laberinto en 4 minutos o menos?*

e) *Según la función f, ¿qué le sucederá al tiempo requerido para que la rata atraviese el laberinto a medida que aumenta el número de pruebas? ¿Podrá la rata atravesar alguna vez el laberinto en menos de tres minutos?*

Solución

a) Sabemos que

$$f(n) = 3 + \frac{12}{n} \quad \Rightarrow \quad f(n) = \frac{3n + 12}{n}$$

Para que esta función este definida, hacemos que $n \neq 0$, por tanto el dominio será $n \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b) Como no pueden existir pruebas negativas, n debe ser mayor que cero, es decir $n > 0$.

c) Haciendo $n = 3$ en la ecuación original, obtenemos

$$f(3) = 3 + \frac{12}{3} = 7 \text{ minutos}$$

d) Haciendo que $f(n) \leq 4$, entonces

$$\frac{3n + 12}{n} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{3n + 12}{n} - 4 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n - 12}{n} \geq 0$$

De aquí deducimos que $n \geq 12$. Es decir a partir de la prueba 12, la rata atravesara el laberinto en 4 minutos o menos.

e) A medida que el número de pruebas aumenta, la rata disminuye el tiempo en que atraviesa el laberinto. Es imposible que la rata pueda atravesar el laberinto en menos de 3 minutos, por cuanto la desigualdad obtenida tendría la forma

$$\frac{3n + 12}{n} < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3n + 12}{n} - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{n} < 0$$

lo cuál es un absurdo, porque n tendría que ser negativa, lo cuál no es posible por el inciso b).

Ejemplo 8.16 *Suponga que durante un programa nacional para inmunizar a la población contra cierto tipo de gripe, los funcionarios de salud pública encontraron que el costo de vacunar al x % de la población era aproximadamente $f(x) = \frac{150x}{200 - x}$ millones de dólares:*

a) *¿Cuál es el dominio de la función f?*

b) *¿Para qué valores de x tiene $f(x)$ una interpretación práctica en este contexto?*

c) *¿Cuál fue el costo de vacunación del primer 50 % de la población?*

d) *¿Cuál fue el costo de vacunación del segundo 50 % de la población?*

e) *¿Qué porcentaje de la población se había vacunado después de una inversión de 15 millones de dólares?*

Solución

a) Para que esta función este definida, hacemos que

$$200 - x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 200$$

por tanto el dominio será $x \in \mathbb{R} - \{200\}$.
b) Como $f(x)$ no puede ser negativa, entonces $0 \leq x < 200$.
c) El costo de vacunación del primer 50 % de la población está dado por

$$f(50) = \frac{150 \cdot 50}{200 - 50} = \frac{150 \cdot 50}{150} = 50$$

Por tanto, cuando se ha vacunado el 50 % de la población el costo es aproximadamente 50 millones de dólares.
d) Para calcular el costo de vacunación del segundo 50 % de la población, hacemos $f(100)-f(50)$, es decir

$$f(100) - f(50) = \frac{150 \cdot 100}{200 - 100} - 50 = \frac{150 \cdot 100}{100} - 50 = 150 - 50 = 100$$

es decir, se invierten 100 millones de dólares.
e) Para calcular el porcentaje de vacunados, con una inversión de 15 millones de dólares, hacemos lo siguiente

$$15 = \frac{150x}{200 - x} \quad \Rightarrow \quad 3000 - 15x = 150x \quad \Rightarrow \quad 165x = 3000 \quad \Rightarrow \quad x \approx 18,18$$

Es decir, se vacunaron aproximadamente el 18.18 %.

Ejemplo 8.17 *De acuerdo con la ley de Boyle, la presión p (libras por pulgada cuadrada) y el volumen v (pulgadas cúbicas) de cierto gas satisfacen la condición $pv = 100$. Supóngase que $50 \leq v \leq 150$. ¿Cuál es el rango de los valores posibles de la presión?*
Solución
Si sustituimos $v = \frac{100}{p}$ en la desigualdad dada $50 \leq v \leq 150$, obtenemos

$$50 \leq \frac{100}{p} \leq 150$$

Se sigue que tanto

$$50 \leq \frac{100}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{p} \leq 150$$

es decir, que tanto $p \leq 2$ como $p \geq \frac{2}{3}$. Entonces, la presión p debe pertenecer al intervalo cerrado $[2/3;\ 2]$.

Ejemplo 8.18 *El gerente de una tienda de muebles compra refrigeradores al precio de mayoreo de \$ 250 cada uno. Sobre la base de experiencias pasadas, el gerente sabe que puede vender 20 refrigeradores al mes a \$ 400 cada uno y un refrigerador adicional al mes por cada reducción de \$ 3 en el precio de venta. Exprese la utilidad mensual P como función del número x de refrigeradores mensualmente vendidos.*
Solución
Interpretemos el enunciado del problema con el significado de que el precio de venta p de cada refrigerador es impuesto al principio de cada mes y que todos los refrigeradores se venden al mismo precio. Puesto que el precio de mayoreo es de \$ 250 cada uno, la utilidad en la venta de cada refrigerador es $p - 250$, y, por lo tanto, la utilidad mensual total P de la venta de x refrigeradores estará dada por $P = x(p - 259)$. Para expresar P como función sólo de x, tenemos que eliminar la variable p. Sea n el número de reducciones de \$ 3 hechas al precio de venta original, de modo que $p = 400 - 3n$. Entonces, se pueden vender n refrigeradores más (es decir, más que los 20 originales) y por lo tanto $x = n + 20$; es decir $n = x - 20$. Por lo tanto, deducimos que

$$P = 400 - 3(x - 20) = 460 - 3x.$$

Mediante la sustitución de este valor de p en la ecuación $P = x(p - 250)$, obtenemos la fórmula

$$P = x(210 - 3x) = 3x(70 - x)$$

para la utilidad mensual total P como función del número x de refrigeradores vendidos al mes. Para concluir, debemos encontrar el dominio relevante de valores de x.
Por cierto, $x \geq 0$. Por otra parte, sería inaceptable una utilidad negativa, por lo que $x \leq 70$. En consecuencia, la descripción completa de nuestra función utilidad es

$$P(x) = 3x(70 - x), \quad 0 \leq x \leq 70.$$

Ejemplo 8.19 *Determine el dominio de la expresión:*

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \dfrac{x-4}{x^2 - 3x + 2}$; **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{6}{6-x}} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1-2x-x^2}}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x} - \dfrac{x}{\sqrt[5]{x^2 - 2x + 2}}$.

Solución

a) La expresión está definida si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \neq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)(x-1) \neq 0 \\ (x-2)(x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1, \quad x \neq 4 \\ x \neq 1, \quad x \neq 2 \end{cases}$$

Por tanto, el dominio es $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 4\}$.

b) La expresión está definida si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{6-x} \geq 0 \\ 6 - x \neq 0 \\ \frac{1-x}{1-2x-x^2} \geq 0 \\ 1 - 2x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-6} \leq 0 \\ x - 6 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x^2+2x-1} \geq 0 \\ x^2 + 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0;\ 6] \\ x \neq 6 \\ x \in [-\sqrt{2} - 1;\ \sqrt{2} - 1] \cup [1;\ +\infty) \\ x \neq -\sqrt{2} - 1, \quad x \neq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Por lo tanto el dominio de la expresión es $x \in [0;\ \sqrt{2} - 1) \cup [1;\ 6)$.

c) La expresión está definida si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2 - 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2 - 2x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty) \\ x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo tanto el dominio de la expresión es: $x \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$.

Ejemplo 8.20 *Determine el codominio de la expresión:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1 - 3x + 2x^2}}$$

Solución

Para determinar el codominio de la función, debemos despejar la variable x:

$$y = \sqrt{\frac{x-3}{1 - 3x + 2x^2}} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{x-3}{1 - 3x + 2x^2}$$

$$2y^2x^2 - (3y^2 + 1)x + (y^2 + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3y^2 + 1 \pm \sqrt{y^4 - 18y^2 + 1}}{4y^2}$$

Esta nueva expresión esta definida si $y^4 - 18y^2 + 1 \geq 0$ y $y \neq 0$. Es decir

$$\begin{cases} y \in (-\infty;\ 2-\sqrt{5}] \cup [2-\sqrt{5};\ -1+\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5};\ +\infty) \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Como $y \geq 0$, entonces el codominio buscado es $(0;\ -2+\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5};\ +\infty)$.

8.2. Tarea

1. Considere las siguientes relaciones:

$$\Re_1 = \{(a,b) \in A\ x\ A / a = b\} \text{ con } A = \{1,2,3\}; \quad \Re_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N} / 2a + b = 9\}.$$

$$\Re_3 = \{(a,b) \in A\ x\ A / a \text{ divide a } b\} \text{ si } A = \{1,2,3,4,5\}.$$

$$\Re_4 = \{(a,b) \in A\ x\ A / ab \geq 0\} \text{ si } A = \{-2,-1,0,1,2,3\}.$$

$$\Re_5 = \{(a,b) \in A\ x\ A / a^2 + b^2 > 3\} \text{ si } A = \{-1,0,1,2,3\}.$$

a) Determine por extensión $\Re_i$, $i = 1,2,3,4,5$; **b)** Determine $Dom(\Re_i)$, $Rec(\Re_i)$;
c) Determine por extensión $\Re^{-1}$.

2. Considere las siguientes relaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$\Re_1 = \{(a,b)/a = b^2\}; \quad \Re_2 = \{(a,b)/a + a^2 = b + b^2\}; \quad \Re_3 = \{(a,b)/a - b; \text{ es múltiplo de } 3\}$$

$$\Re_4 = \{(a,b)/\exists\ c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = cb\}; \quad \Re_5 = \{(a,b)/\exists\ c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = 2c\}$$

Determine cuales de las relaciones son: reflejas, simétricas, transitiva, antisimetricas.

3. Sean las relaciones definidas en $\mathbb{R}$:

$$\Re = \{(x,y)/y = 2x\} \quad \text{y} \quad \aleph = \{(x,y)/y = 2x^3\}.$$

Determine $\aleph \circ \Re$ y $\Re \circ \aleph$.

4. Determine el dominio y la imagen de cada relación. Diga cuáles son funciones:

a) $\{(x,y)/y = 2x^2 - 3\}$; **d)** $\{(x,y)/y = 5\sqrt{x}\}$;
b) $\left\{(x,y)/y = \dfrac{2x}{3x+1}\right\}$; **e)** $\left\{(x,y)/y = \dfrac{3}{2x-1}\right\}$;
c) $\left\{(x,y)/y = \dfrac{5x}{x+3}\right\}$; **f)** $\left\{(x,y)/y = \dfrac{x}{5-3x}\right\}$.

5. Encuentre el dominio, rango y graficar cada una de las relaciones:

a) $xy(x+y-2) = x-y+1$;
b) $(x+y)^2 + 2x + 2y = 0$;
c) $x^2 - 2xy + 4x - y = 0$;
d) $xy^2 + 5x^2y + 4x^2 + xy - 9 = 0$;
e) $y^2(x^2+1) - 6x^2y + x^4 = 0$;
f) $x^4 + y^4 - 7x^2 - 3y^2 + 14 = 0$;
g) $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$;
h) $y^2 - (x-1)^2(x-2) = 0$;
i) $y^2(4x-1) = x^2(x-1)$;
j) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$;
k) $x^2 - y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$;
l) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$;
m) $4y^2 - 3x^2 + 8y - 12x - 16 = 0$;
n) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 7 = 0$.

6. Sea $f = (x,3),(2,x^2),(1,4),(2,1)$ una función, encuentre el valor de x.

7. Determine el valor de ab si el conjunto de pares ordenados $f = \{(2,5),(-1,3),(2,2a-b),(-1,b-a),(a+b^2,a)\}$ representa una función.

8. Si el conjunto de pares ordenados $f = \left\{(1,a),\left(2,\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}\right),(3,a+b),(3,-c)\right\}$ representa una función, determine el valor de $f(2)$.

9. Sea $f(x) = \sqrt{5-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ una función real de variable real, determine su dominio.

10. Sean las funciones $f(x) = \sqrt[4]{9-x^2}$, $g(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$ y $h(x) = x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x + 2$. Calcule $Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h)$.

11. Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{9-4x^2}}$.

12. Encuentre el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

13. Encuentre el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{6-\sqrt{x-1}} + \dfrac{3-\sqrt{2-x}}{5-x}} + 3x + 1$.

14. Sea $f(x) = \sqrt{4x-x^2}$, encuentre $Ran(f) \cup Dom(f)$.

15. Dada la función $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + x^2 - 1$. Determine $Dom(f) \cap Ran(f)$.

16. Determine el menor valor que toma la función $f(x) = x(x+2) + 2$ si su dominio es $Dom(f) : \left\{x \in \mathbb{R} / -1 < \dfrac{1}{x-1} < 1\right\}$.

17. Calcule $Dom(f) \cap Ran(f)$ de la función $f(x) = \begin{cases} 3x & x \in [-2;3), \\ x^2, & 3 \le x < 5 \end{cases}$

18. Determine el rango de la función $f = \left\{\left(x, \dfrac{x}{x-2}\right) / \sqrt{x}(x^2-4) > 0\right\}$.

19. Encuentre el rango de la función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-9} & -5\leq x\leq -3\\ |x+3|-2, & 0<x\leq 5\\ \frac{3x-16}{x-5}, & x>6\end{cases}$$

20. Si f es una función lineal de pendiente 8 e intercepto con el eje Y, 5, encuentre el valor de $f(0)+f(-1)+f(1)$.

21. Sea f una función lineal de pendiente negativa, tal que $Dom(f):(1;2)$ y $Ran(f):(3;4)$. Hallar $f(x)$.

22. Si la gráfica de $g(x)=4(x-2)(x+3)$ intercepta al eje X en los puntos P y Q, entonces encuentre la longitud del segmento PQ.

23. Las gráficas de $x^2+y=5$ y $x+y=5$ se cortan en 2 puntos, según ello determine la distancia entre estos 2 puntos.

24. Determine el rango de $f(x)=|x+2|-|x-2|$.

25. Determine el dominio de la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}}{x[|2x-1|]-2x}$.

26. Determine el rango de la función $f(x)=\left[\left|\dfrac{2-x}{2}\right|\right]$, $x\in(-2;1]$.

27. Dada la relación $\Re=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x-y\in\mathbb{R}^+\}$, hallar su gráfica.

28. Dada la relación $\Re=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y<x^2+1\wedge y\geq 1/2\}$, hacer su gráfica.

29. Dada la relación $\Re=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\sqrt{y}<x\wedge y>x\}$, hacer su gráfica.

30. Grafique la relación $\Re=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|2x+y|<3\}$.

31. Dadas las relaciones $\Re_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2>x^2\}$ y $\Re_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|y|\geq x^2\}$. Grafique $\Re_1\cap\Re_2$.

32. Grafique la relación $\Re_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|3x-y|+|x+y|\leq|4x|\}$.

33. Dada la relación $\Re=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|y|<|x|,|x|<3\}$. Encuentre el número de elementos del conjunto P$=\{(x,y)\in\Re/x,y\in\mathbb{Z}\}$.

34. Dada la función $f(x) = mx$ y la circunferencia $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$. Determine los valores de m para que la fráfica de f tenga puntos comunes en la circunferencia.

35. Dadas las funciones $f = \{(3,-2),(1,0),(2,3),(4,1)\}$ y $g = \{(6,3),(1,2),(4,0),(3,-1)\}$. Determine la función $f^2 + \dfrac{f}{g}$.

36. Si $f+g = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ y $f-g = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$, determine $Ran(f^2 - g^2)$.

37. Dadas las funciones $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ y $g = \{(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$. Encuentre $f \circ g$ e indique la suma de los elementos del dominio.

38. Dadas las funciones $f = \{(-2,0),(1,-4),(3,1),(5,2)\}$ y $g = \{(-2,1),(0,3),(1,4),(2,0),(4,5)\}$. Encuentre $f \circ g$.

39. Sean las funciones $g = \{(1,2),(2,0),(4,5),(3,-1)\}$ y $f \circ g = \{(1,4),(4,7),(3,1)\}$. Encuentre la suma de elementos del dominio de la función f.

40. Dadas las funciones $f = \{(2,1),(-2,3),(1,5),(-3,4),(7,8)\}$ y $g = \{(3,-2),(-3,1),(7,2),(2,4)\}$. Encuentre el valor de

$$\left[\frac{(f\circ g)(3) + 3g^2(-3) - (f+g)(2)}{f(7)g(7)}\right]^{-1/2}$$

41. Un estudio ambiental de una cierta ciudad sugiere que el nivel diario medio de monóxido de carbono en el aire será de $c(p) = 0,4p + 1$ partes por millón cuando la población sea p miles. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será de $p(t) = 8 + 0,2t^2$ miles. Determine:

a) El nivel futuro de monóxido de carbono en la comunidad, como función del tiempo.

b) El nivel de monóxido de carbono dentro de 10 años.

42. Los biólogos han hallado que la velocidad de la sangre en una arteria es una función de la distancia de la sangre al eje central de la arteria. De acuerdo con la ley de Poiseuille, la velocidad de la sangre medida en centímetros por segundo, que está a r centímetros del eje central de una arteria viene dada por la función $S(r) = c(R^2 - r^2)$, donde c es una constante y R es el radio de la arteria. Suponga que para una cierta arteria, $c = 1,76x105$ centímetros y $R = 1,2x10^{-2}$ centímetros. Calcule:

a) La velocidad de la sangre en el eje central de esta arteria.

b) La velocidad de la sangre equidistante entre la pared de la arteria y el eje central.

43. Dos rayos, entre los que el ángulo es igual a $60°$, tienen origen común. Desde éste, por uno de los rayos salió una partícula a una velocidad v y, pasada una hora, por el otro rayo, la segunda partícula a velocidad $3v$. Determine la dependencia entre la distancia entre las partículas y el tiempo de movimiento de la primera. ¿A qué distancia mínima se aproximarán las partículas después de la salida de la segunda de ellas?

44. Dado que $0°C$ es lo mismo que $32°F$ y que un cambio de $1°C$ equivale a un cambio de $1,8 \circ F$, exprese la temperatura Celsius C en función de la temperatura Fahrenheit F.

45. Una caja rectangular tiene 125 cm^3 de volumen y una base cuadrada de longitud x cm. en su arista. Exprese el área A del rectángulo como función de x.

46. Un rectángulo cuya base tiene longitud x está inscrita en un círculo de radio 2. Exprese el área A del rectángulo en función de x.

47. Un campo petrolero que contiene 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios de petróleo. Por cada nuevo pozo que es perforado, suponga que la producción diaria de cada uno disminuye 5 barriles. Escriba la producción diaria del campo petrolero en función del número x de pozos nuevos que se perforan.

48. Un cilindro circular recto tiene un volumen de 1000 cm^3 y el radio de su base x cm. Exprese la superficie total A del cilindro como función de x.

49. A y B parten del mismo sitio. A camina 4 kilómetros por hora y B 5 kilómetros por hora:
a) ¿Cuánto caminan en x horas?
b) ¿Cómo están de alejados entre sí al cabo de x horas si saliendo al mismo tiempo han caminado en dirección opuestas?
c) ¿Qué distancia los separa cuando A ha caminado $x > 2$ horas si van en la misma dirección, pero B sale 2 horas después que A?
d) Por cuántas horas tiene que caminar B para alcanzar a A?

50. La tasa a la cual la temperatura de un objeto cambia es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la del medio que lo rodea. Exprese esta tasa como una función de la temperatura del objeto.

51. Se consideran las secciones del tetraedro regular $ABCD$ paralelas a la arista AB y a la altura DO del tetraedro. Encuentre la dependencia entre el área S de la sección y la distancia x entre el plano de la sección y la arista AB si la altura de la cara del tetraedro es igual a b. Hallar el valor máximo de S.

52. Un almacén de discos ofrece la siguiente oferta: si se compran 5 discos compactos, a \$ 10 cada uno, pueden obtenerse discos adicionales a mitad de precio. Hay un límite de 10 discos por cliente. Exprese el costo de los discos como una función de la cantidad comprada.

53. Un tren parte de la estación a mediodía y viaja hacia el este a 30 kilómetros por hora. A las 2 p.m. del mismo día un segundo tren deja la estación y viaja hacia el sur a 25 kilómetros por hora. Exprese la distancia y entre ambos trenes en función de t, tiempo que ha estado rodando el segundo tren.

54. Un tren parte de la estación a mediodía y viaja hacia el este a 30 kilómetros por hora. A las 14:00 horas del mismo día un segundo tren deja la estación y viaja hacia el sur a 25 kilómetros por hora. Expresar la distancia d entre ambos trenes en función de t, tiempo que ha estado rodando el segundo tren.

55. La tasa a la que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de personas que han contraído la enfermedad y al número de personas sanas. Exprese esta tasa como una función de la cantidad de personas que han contraído la enfermedad.

56. La tasa a la que las personas resultan implicadas en un escándalo gubernamental es conjuntamente proporcional a la cantidad de personas ya implicadas y a la cantidad de personas involucradas que aún no han sido implicadas. Exprese esta tasa como una función de la cantidad de personas que han sido implicadas.

57. En determinada fábrica, el costo de instalación es directamente proporcional al número de máquinas utilizadas y el costo de operación es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas. Exprese el costo total como una función del número de máquinas utilizadas.

58. Se tiende un cable desde una planta de energía, a un lado de un río de 900 metros de ancho, hasta una fábrica en el otro lado, 3000 metros río abajo. El cable irá en línea recta desde la planta de energía a algún punto P en la orilla opuesta, y luego a lo largo de la orilla hasta la fábrica. El costo de tender el cable por el agua es \$ 5 por metro, mientras que el costo sobre tierra es \$ 4 por metro. Si x es la distancia desde P al punto del otro lado del río enfrente de la planta de energía, exprese el costo de instalación del cable como una función de x.

59. Un automóvil que viaja hacia el Este a 80 Km. por hora y un camión que viaja hacia el Sur a 60 Km. por hora parten de la misma intersección. Exprese la distancia entre ellos como una función del tiempo.

60. Se va a construir una caja sin tapa con una hoja cuadrada de cartón cuyo lado tiene una longitud de 50 cm. Primero, se recortan cuatro pequeños cuadrados, cada uno de los cuales tiene lados de x cm. de longitud, de las cuatro esquinas de la hoja de cartón. Después, los cuatro faldones resultantes se doblan hacia arriba para formar los cuatro lados de la caja, que tendrá una base cuadrada y una profundidad de x cm. Exprese el volumen V como función de x.

61. Una escalera de 25 metros de largo se apoya contra una pared vertical, estando su pie a 7 metros de la base de la pared. Si el pie de la escalera se aleja de la pared a razón de 2 metros por segundo, expresar la distancia y del extremo superior de la escalera sobre el nivel del suelo como función del tiempo t durante el movimiento.

62. Una lancha de motor que navega x km/h en aguas tranquilas, se encuentra en un rió cuya corriente es de $y < x$ km/h:

a) ¿Cuál es la velocidad de la lancha subiendo el río?

b) ¿Cuál es la velocidad de la lancha bajando el río?
c) ¿Cuánto sube la ancha en 8 horas?
d) ¿Qué tiempo tarda la lancha para bajar 20 km. si el motor se para a los 15 km. del punto de partida?

63. Una pelota se deja caer desde el tejado de un edificio. Si su altura respecto del suelo medida en metros, después de t segundos viene dada por la función $H(t) = -16t^2 + 256$. Determine:
a) ¿A qué altura estará la pelota después de 2 segundos?
b) ¿Qué distancia recorrerá la pelota durante el tercer segundo?
c) ¿Cuál es la altura del edificio?
d) ¿Cuándo llegará al suelo la pelota?

64. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine el dominio de las expresiones:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{13+x} - \sqrt{10+2x}}{\sqrt{19+2x} - 5}$;

b) $f(x) = \dfrac{|x+2| + 1 - 2x - 2x^2}{|2x+2| - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x}}{x^2 + 2x - 5}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{15+6x} - \sqrt[3]{25+x}}{x^4 + 2x - 20}$;

e) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x-1}}{x + 2\sqrt{x+1}}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{\sqrt{x^2 - 3x}}$;

g) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x+5}}{x - \sqrt{x+1}}$;

h) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{x} + 3x}$;

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x}$;

j) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x-1}}$;

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x-2}$;

l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{15+x} - \sqrt{17-x}}{\sqrt{3+x} - 2}$;

m) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$;

o) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+1}}$;

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+11} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 25}$;

q) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$;

r) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+x} - x - 1}$;

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x^2 + x - 3}$;

t) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} + x}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$;

u) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1} - x}$;

v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$;

w) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$;

x) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{x^2+3} - x}$;

y) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-16} + x}{\sqrt{x^2-4} + x}$;

z) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^3+1} - x\sqrt{x}}$.

65. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine el dominio de las expresiones:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2 - \sqrt{x^3 - x^4}}}{\sqrt{x^2 - 3}}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x}}{\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x} - 1}}{\sqrt[3]{\sqrt{x} + 1}}$;

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3 - x} - x + 2}{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1}$;

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 2 - x}{x + 3}$;

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x} + 1}{2 - 9\sqrt{9 + x}}$;

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}}{x - 1}$;

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 + x2}}$;

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}$;

l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x - 2}}{\sqrt[3]{x^2 - 3x - 2}}$;

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{6 - x}}$;

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3 + x} - \sqrt{x}}{x + 2 + \sqrt{x + 1}}$;

o) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(8 - 2x - x^2)^3}}$;

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt[4]{x + 1} - \sqrt[4]{x}}$.

66. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine el codominio de las expresiones:

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2 + 1}{x}}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1}$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$;

f) $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$;

h) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$;

i) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 9}$;

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$;

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$;

l) $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{3 + x^2}$;

m) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$;

n) $f(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}$;

o) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{2x^2 + 3x - 2}$;

p) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{2x2 + 3x - 9}$;

q) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 7x - 6}$;

r) $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^4$;

s) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$;

t) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$;

u) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1 + x}}$.

67. De acuerdo con la ley de Boyle, la presión p (libras por pulgada cuadrada) y el volumen v (pulgadas cúbicas) de cierto gas satisfacen la condición $pv = 800$. ¿Cuál es el rango de los valores posibles de la presión, dado que $100 \leq v \leq 200$?

68. La relación entre la temperatura Fahrenheit F y la temperatura Celsius C está dada por $F = 32 + \frac{9}{5}C$, Si el rango de temperaturas en cierto día va de la mínima $70^\circ F$ a la máxima de $90^\circ F$, ¿cuál es el rango de la temperatura en gados Celsius?.

69. El periodo T (en segundos) de un péndulo simple de longitud L (en pies) está dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$. Si $3 < L < 4$, ¿cuál es el rango de valores posibles de T?

8.3. Función inversa

Puesto que x no está determinada unívocamente cuando se conoce y, no nos atreveremos a usar la notación $x = g(y)$ y nos abstendremos de llamarla función. Tal correspondencia en la que a cada y puede corresponder ninguno, uno o varios valores de x se llama relación. El conjunto de pares (y, x) se denomina relación inversa de $y = f(x)$ si contiene el par (y_0, x_0) si y solamente si $y_0 = f(x_0)$. La situación se simplifica más cuando se seleccionan algunos de los pares a partir de la relación, en forma tal que se da origen a una función inversa $x = g(y)$.

Definición 8.9 Función inversa
Se llama función inversa de $y = f(x)$ para y en un dominio D, a una función $x = g(y)$, definida para y en D, si $f(g(y)) = y$ para cada $y \in D$.

Como para una $f(x)$ fija puede haber muchas funciones inversas, a cada una de éstas se la llama rama de la función inversa.

Toda función $y = f(x)$ aplica el dominio de existencia de la función sobre el codominio de tal modo que a cada x del dominio de existencia le corresponde el único valor y del codominio. Así pues, las funciones pueden dividirse en dos grupos:

1. Funciones que realizan una aplicación biunívoca del dominio de existencia sobre el codominio.

2. Funciones que no poseen esta propiedad.

Si las funciones del segundo grupo se analizan no en todo el dominio de existencia, se logra frecuentemente elegir tal dominio de definición (una parte del dominio de existencia) que la función aplicará dicho dominio de definición sobre el correspondiente codominio ya de manera biunívoca. Cabe indicar que cualquier función $y = f(x)$ en aquella parte del dominio de definición D perteneciente al dominio de existencia de la función, donde ella es estrictamente monótona, es decir, creciente o decreciente, pertenece al primer grupo. Supongamos que el dominio de la función $y = f(x)$ es tal que la función realiza una aplicación biunívoca del dominio D sobre el codominio C. Entonces, a partir de cualquier y, perteneciente al codominio C, se puede establecer unívocamente el valor de x de dominio D, procediendo de la manera siguiente: en la igualdad $f(x) - y = 0$ se considera fijo cualquier $y \in C$ y se busca $x \in D$ que satisfaga la igualdad citada. Cada $x \in D$ encontrado se denota con $f^{-1}(y)$. La igualdad $x = f^{-1}(y)$ lleva el nombre de regla inversa.

Definición 8.10 Función inversa
Se denomina función inversa de la función $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in C$, aquella que se obtiene a partir de la regla inversa $x = f^{-1}(y)$, sustituyendo x por y, e y por x con la sustitución simultánea del dominio por el codominio y del codominio por el dominio.

Realizada la sustitución mencionada, el codominio de la función $y = f(x)$ se convierte en el dominio de la función inversa $y = f^{-1}(x)$, mientras que el dominio de la función $y = f(x)$ se hace el codominio de la función inversa $y = f^{-1}(x)$. Así pues, dos funciones, a saber $y = f(x)$ con el dominio D y el codominio C, y la función $y = f^{-1}(x)$ con C y D que intervienen como el dominio y el codominio, respectivamente, donde $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in C$, y $f^{-1}(f(x)) = x$

para todo $x \in D$, son tales que una de ellas es inversa de la otra. No siempre se logra encontrar para cada función tal dominio, que se aplique por ella de manera biunívoca sobre el codominio correspondiente.

Para que una función f tenga asociada una función g con las características anteriormente mencionadas, es necesario que tenga una propiedad importante: no puede enviar a dos elementos diferentes de su dominio a la misma imagen. Es decir, no pueden haber x_1 y x_2 en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Así pues, debemos considerar funciones $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tengan la propiedad de los elementos de su dominio nunca comparten imágenes.

Definición 8.11 Función inyectiva

Una función uno a uno es una función en la que a cada elemento en el codominio sólo se corresponde con un elemento en el dominio. Más precisamente, tales que:

$$x_1, x_2 \in I, \;\; x_1 \neq x_2 \;\;\Rightarrow\;\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

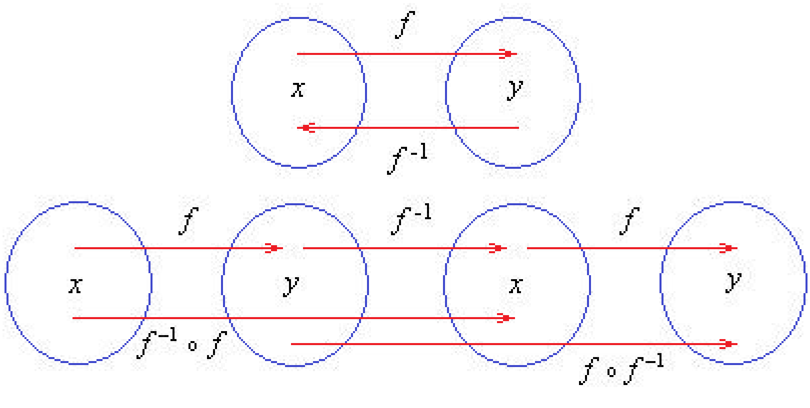
Una función que tiene esta propiedad también se le conoce con el nombre de inyectiva.

Debemos observar que la gráfica de una función inyectiva tiene una propiedad importante: Si trazamos cualquier recta horizontal, ésta puede cortar la gráfica de la función cuando mucho en un punto. En efecto, tal recta horizontal es del tipo $y = y_0$ (constante), de modo que si cruza la gráfica de la función es en un punto cuya abscisa x tiene por imagen justamente a y_0. Siendo inyectiva la función, solamente puede haber un valor de x que tenga por imagen a y_0.

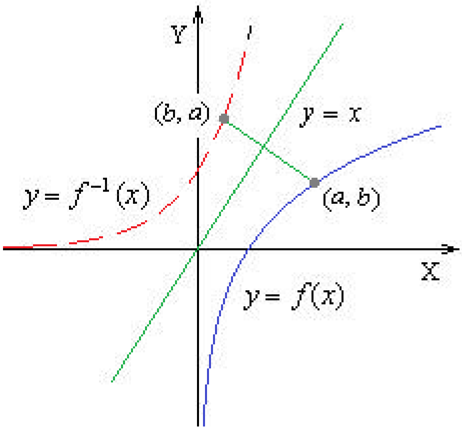
Sea entonces $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. La función g que deshace las imágenes de f se llama función inversa de f, y se denota con f^{-1}. Observe que esta última función tendrá como dominio las imágenes de f. Es decir, el dominio de f^{-1} es el rango de f. Y recíprocamente, el rango de f^{-1} es el dominio de f. La función f^{-1} tiene entonces la propiedad fundamental:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \;\text{ para toda } x \text{ del dominio de } f$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \;\text{ para toda } y \text{ en el dominio de } f^{-1}$$



Pensemos cómo podemos hacer para encontrar la inversa de una función inyectiva dada $y = f(x)$. Si en esta fórmula se nos está diciendo qué es lo que hace f con x para obtener su imagen $y = f(x)$, y nosotros buscamos una función f^{-1} que a y la regrese a x, lo que debemos buscar es qué debemos hacer con la y para obtener nuevamente el valor x. Así que una buena idea para conseguir esta función es, de la fórmula $y = f(x)$, despejar a x en términos de y. La fórmula en la que se muestra x en términos de y es la expresión $x = f^{-1}(y)$ de la función inversa buscada.



Algunas funciones importantes no son inyectivas, de modo que de ellas no podemos obtener una inversa. Sin embargo, es común que se restrinja el dominio de la función para que ésta quede inyectiva, y entonces podamos definir su inversa. Una propiedad interesante que tienen las gráficas de una función inyectiva y de su inversa es la siguiente: supongamos que (a, b) es un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$. Esto significa que $b = f(a)$. La función inversa f^{-1} debe ser tal que $f^{-1}(b) = a$, lo cual significa que el punto (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}. Así entonces, si (a, b) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces (b, a) debe ser un punto de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Observe que los puntos (a, b) y (b, a) están situados simétricamente respecto de la recta $y = x$.

Podemos concluir entonces que la gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$ es un reflejo, respecto de la recta $y = x$, de la gráfica de la función $y = f(x)$.

Ejemplo 8.21 *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encuentre la inversa:*

a) $f(x) = 2 + x - x^2$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x}$; **c)** $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty;\ -1]$.

Solución

a) Completando cuadrados, obtenemos

$$y = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Con $y < \frac{9}{4}$ hay dos valores diferentes del argumento, es decir, corta el gráfico de la función en dos puntos. Esto significa que la función f definida para todo $\mathbb{R}$ es no invertible.

b) Para probar que la función es inyectiva, hacemos:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^2 + 3x_1}{x_1^2 - 5x_1} = \frac{x_2^2 + 3x_2}{x_2^2 - 5x_2}$$

$$(x_1^2 + 3x_1)(x_2^2 - 5x_2) = (x_2^2 + 3x_2)(x_1^2 - 5x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Por tanto la función es inyectiva.

Como $y = \frac{x^2+3x}{x^2-5x}$, entonces $x = \frac{5y+3}{y-1}$, reemplazamos esta nueva expresión en la original y obtenemos

$$y = \frac{\left(\dfrac{5y+3}{y-1}\right)^2 + 3\left(\dfrac{5y+3}{y-1}\right)}{\left(\dfrac{5y+3}{y-1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{5y+3}{y-1}\right)} = \frac{\dfrac{(5y+3)^2 + 3(5y+3)(y-1)}{(y-1)^2}}{\dfrac{(5y+3)^2 - 5(5y+3)(y-1)}{(y-1)^2}}$$

$$y = \frac{(5y+3)(5y+3+3y-3)}{(5y+3)(5y+3-5y+5)} = \frac{8y}{8} = y$$

De esta manera probamos que la función es sobreyectiva. Como la función es biyectiva, entonces la función inversa está dada por

$$g(x) = \frac{5x+3}{x-1}$$

c) Probamos que la función es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 - \sqrt{x_1^2 - 1} = x_2 - \sqrt{x_2^2 - 1}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\sqrt{x_1^2 - 1} - \sqrt{x_2^2 - 1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 x_2 = \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0; \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Por tanto la función es inyectiva.
Como $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$, entonces $x = \frac{1+y^2}{2y}$, reemplazamos esta nueva expresión en la original y obtenemos

$$y = \frac{1+y^2}{2y} - \sqrt{\left(\frac{1+y^2}{2y}\right)^2 - 1} = \frac{1+y^2}{2y} - \sqrt{\frac{(1+y^2)^2 - 4y^2}{4y^2}}$$

$$y = \frac{1+y^2}{2y} - \sqrt{\frac{(1-y^2)^2}{4y^2}} = \frac{1+y^2}{2y} - \frac{1-y^2}{2y} \quad \Rightarrow \quad y = y$$

De esta manera probamos que la función es sobreyectiva. Como la función es biyectiva, entonces la función inversa está dada por

$$g(x) = \frac{1+x^2}{2x}$$

8.4. Paridad de una función

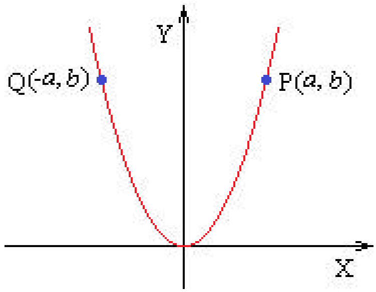
Definición 8.12 Función par
La función $y = f(x)$ se denomina par, si el dominio es un conjunto simétrico respecto de las ordenadas y si $f(-x) = f(x)$ para cualquier $x \in D$.

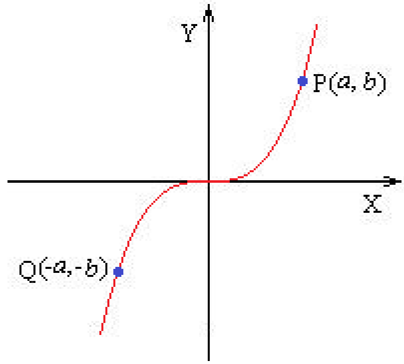
De cualquier función par $y = f(x)$, con dominio D, se dice que es simétrica respecto del eje de ordenadas, puesto que, cualquiera que sea $x \in D$, los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$ son simétricos con relación al eje de ordenadas.

Definición 8.13 Función impar
La función $y = f(x)$ se denomina impar, si el dominio D es un conjunto simétrico respecto del origen de coordenadas y si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in D$.

De cualquier función impar $y = f(x)$, que dispone del dominio D, se dice que es simétrica respecto del origen de coordenadas, puesto que, cualquiera que sea $x \in D$, los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(-x, -f(x))$ son simétricos con relación al origen de coordenadas. A la par con las funciones pares e impares existen también funciones que no son ni unas ni otras.

Teorema 8.7 *Toda función definida en un conjunto D, simétrico respecto del origen de coordenadas, puede ser representada en forma de la suma de dos funciones, cada una de las cuales está definida en el mismo conjunto D, y una de las cuales es par y la otra, impar.*





A la par con el concepto de función par, es decir, de función simétrica respecto del eje de ordenadas, se puede introducir una notación más general de una función, simétrica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$. Suele decirse que el conjunto D es simétrico respecto del punto $(a, 0)$, si dicho conjunto es tal que el punto $2a - x \in D$ para cualquier $x \in D$.

Definición 8.14 Función simétrica respecto a una recta
Una función $y = f(x)$ es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por el punto de coordenadas $(a, 0)$, si el dominio es un conjunto simétrico respecto del punto $(a, 0)$ y si para todo x perteneciente al dominio se verifica que $f(2a - x) = f(x)$.

La gráfica de una función par es obviamente, simétrica respecto del eje de ordenadas, y la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas. Para construir la gráfica de una función impar es suficiente construirla para $x \geq 0$. Para $x < 0$, la gráfica resulta una representación simétrica de la parte de la gráfica construida respecto al origen de coordenadas.

El producto de dos funciones pares o de dos funciones impares será una función par, y el producto de una función par por otra impar será una función impar. Desde luego, la mayoría de las funciones son no pares y no impares.

Ejemplo 8.22 *Determinar la paridad de la función:*
a) $f(x) = 6x^2 + 8 + (x - 2)^2$; **b)** $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$;
c) $f(x) = |10 - x| - |10 + x|$.
Solución
a) $f(-x) = 6(-x)^2 + 8 + (-x - 2)^2 = 6x^2 + 8 - (x + 2)^2 \neq \pm f(x)$.
La función no es par ni impar.
b) $f(-x) = |-x + 1| + |-x - 1| = |-(x - 1)| + |-x(x + 1)| = |x - 1| + |x + 1| = f(x)$.
La función es par.
c) $f(-x) = |10 - (-x)| - |10 + (-x)| = |10 + x| - |10 - x| = -(|10 - x| - |10 + x|) = -f(x)$.
La función es impar.

8.5. Tarea

1. Demuestre que el producto de dos funciones pares o dos impares es una función par, mientras que el producto de una función par por una impar es una función impar.

2. Demuestre que toda función definida sobre un conjunto simétrico al origen de coordenadas es representable en forma de la suma de funciones par e impar.

3. La función f es ni par ni impar, la g es par, la h es impar. Puede la suma:
a) $f+g$ se par; **b)** $f+g$ ser impar; **c)** $f+h$ ser par; **d)** $f+h$ ser impar.

4. La función f es ni par ni impar, la g es par, la h es impar y tiene sentido la composición de cualesquiera dos de estas funciones. Indique todas las composiciones que son:
a) funciones pares; **b)** funciones impares.

5. Escriba la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ como la suma de una función par más una función impar.

6. Demuestre que si f y g son funciones pares, entonces su suma $h(x) = f(x) + g(x)$ es una función par.

7. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces su suma $h(x) = f(x)+g(x)$ es una función impar.

8. Demuestre que si f y g son funciones pares, entonces su producto $h(x) = f(x)g(x)$ es una función par.

9. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces su producto $h(x) = f(x)g(x)$ es una función par.

10. Demuestre que si f es una función par y g es una función impar, entonces su producto $h(x) = f(x)g(x)$ es una función impar.

11. Demuestre que si f y g son funciones pares, entonces su cociente $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es una función par.

12. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces su cociente $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es una función par.

13. Representе la función f en forma de la suma de funciones par e impar:
a) $f(x) = (x+1)^2$; **b)** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^4}$; **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $|x| < 1$;
d) $f(x) = |x-1|$.

14. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera, definida en el conjunto I de $\mathbb{R}$, simétrico respecto del origen:

a) Demuestre que la función $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ es par.

b) Demuestre que la función $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ es impar.

c) Verifique que $f(x) = g(x) + h(x)$. Concluya que toda función se puede escribir como la suma de una función par más una función impar.

8.6. Monotonía de una función

En la presente sección estudiaremos una serie de propiedades importantes de las funciones continuas y que encuentran muchas aplicaciones.

Definición 8.15 Función continua
La función $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}$ se llama continua sobre el conjunto $\mathbf{D}$, si es continua por $\mathbf{D}$ en cada uno de sus puntos.

Una clase importante de funciones continuas es la clase de funciones continuas sobre los intervalos del eje numérico. Comencemos el estudio por las funciones continuas sobre los segmentos. Si la función f es continua sobre el segmento $[a; b]$ entonces su continuidad en el punto $x = a$ es equivalente a la continuidad por la derecha y su continuidad en el punto $x = b$, a la continuidad por la izquierda en este punto.

Definición 8.16 Función acotada superiormente
La función f recibe el nombre de acotada superiormente sobre el conjunto $\Phi \in \mathbf{D}(f)$ si existe un número C tal que para cualquiera $x \in \Phi$ es cierta la desigualdad $f(x) \leq C$. Simbólicamente esta definición la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\exists\, C\ \forall x\ [(x \in \Phi) \Rightarrow (f(x) \leq C)]$$

Análogamente, la función f es acotada inferiormente sobre el conjunto

$$\Phi \subset \mathbf{D}(f)\text{si} : \exists\, C\ \forall\ x\ [(x \in \Phi) \Rightarrow (f(x) \geq C)]$$

La función acotada tanto superior como inferiormente sobre el conjunto Φ lleva el nombre de acotada sobre el conjunto Φ. Esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición 8.17 Función acotada
La función f es acotada sobre el conjunto $\Phi \subset \mathbf{D}(f)$ si existe un número $C > 0$ tal que para cualquier $x \in \Phi$ es cierta la desigualdad $|f(x)| \leq C$; para abreviar:

$$\exists\, C > 0\ \forall x\ [(x \in \Phi) \Rightarrow (|f(x)| \leq C)]$$

Si en estas definiciones $\Phi = \mathbf{D}(f)$, la función se denomina superiormente acotada, inferiormente acotada, acotada, respectivamente.

Teorema 8.8 Weierstrass
Cualquier función continua sobre un segmento está acotada y alcanza sobre él su cota superior y su cota inferior.

Ejemplo 8.23 *Demuestre que la función*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

es acotada.

Solución

De la desigualdad para la madia proporcional y la aritmética se desprende que

$$|x| \leq \frac{x^2+1}{2}$$

De aquí obtenemos

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

Para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir, se verifica con $C = \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, la función dada es acotada. ©

Ejemplo 8.24 *Demuestre que la función*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; x \neq 0$$

Es no acotada.

Solución

Sea C un número arbitrario positivo. La desigualdad $\frac{1}{x^2} > C$ es equivalente a la desigualdad $|x| < \frac{1}{\sqrt{C}}$ con $x \neq 0$. Si tomamos $x = \frac{1}{2\sqrt{C}}$ obtenemos que $\frac{1}{x^2} = 4C > C$, lo que en correspondencia con la definición, precisamente, signifique que la función dada es no acotada. ©

Definición 8.18 Máximos y mínimos

Supongamos que una función $y = f(x)$ está definida en el conjunto $\mathbf{D}$. Si existe tal $k \in \mathbf{D}$, que para cualquier $x \in \mathbf{D}$ se verifica la desigualdad $f(x_{1,2}) \geq f(k)$, se dice que la función $y = f(x)$, definida en el conjunto $\mathbf{D}$, toma para $x = k$, el valor mínimo $r = f(k)$.

Supongamos que una función $y = f(x)$ está definida en el conjunto $\mathbf{D}$. Si existe tal $k \in \mathbf{D}$, que para cualquier $x \in \mathbf{D}$ se verifica la desigualdad $f(x_{1,2}) \leq f(k)$, se dice que la función $y = f(x)$, definida en el conjunto $\mathbf{D}$, toma para $x = k$, el valor máximo $r = f(k)$.

Ejemplo 8.25 *Encuentre el radio de la base y la altura del cilindro inscrito en una esfera de radio R, si el área de la superficie lateral del cilindro tiene el valor máximo de los posibles.*

Solución

Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \;\; \Rightarrow \;\; h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

El área del cilindro está dada por $A = 2\pi r h$. Reemplazamos h en la ecuación del área del cilindro

$$A(r) = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$$

Para encontrar las dimensiones del cilindro, hacemos $A(r) = A(k)$:

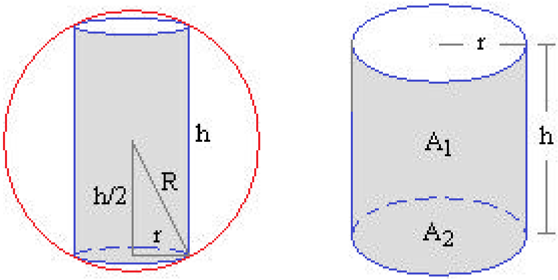
$$4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi k\sqrt{R^2 - k^2} \;\; \Rightarrow \;\; r^2(R^2 - r^2) = k^2(R^2 - k^2) = 0$$

$$(r^2 - k^2)(R^2 - r^2 - k^2) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

De esta manera obtenemos que el radio del cilindro es $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Reemplazamos r en la ecuación h, obtenemos la altura del cilindro

$$h = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{2}R.$$

por tanto $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ y $h = \sqrt{2}R$ dan el área máxima.



Ejemplo 8.26 *Se desea construir un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa que tenga un volumen de 24π centímetros cúbicos. El material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación.*

Solución

El volumen del cilindro está dado por

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad 24\pi = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24}{r^2}$$

El costo total de fabricar el recipiente es

$$C(r) = A_1 p + 3A_2 p \quad \Rightarrow \quad C(r) = 2\pi r h p + 3\pi r^2 p$$

Reemplazamos h en $C(r)$

$$C(r) = 2\pi r \frac{24}{r^2} p + 3\pi r^2 p \quad \Rightarrow \quad C(r) = \frac{48\pi p}{r} + 3\pi r^2 p \quad \Rightarrow \quad C(r) = \frac{3\pi p}{r}(16 + r^3)$$

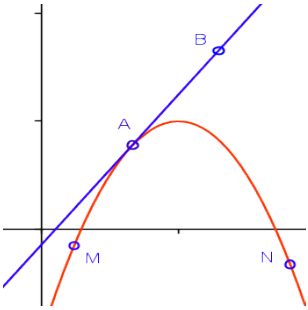
Para encontrar las dimensiones del recipiente, hacemos $C(r) = C(k)$:

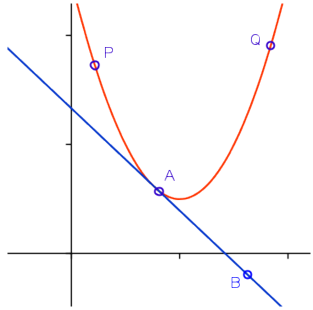
$$\frac{3\pi p}{r}(16 - r^3) = \frac{3\pi p}{k}(16 + k^3) \quad \Rightarrow \quad 16(r-k) - rk(r-k)(r+k) = 0$$

$$(r-k)(16 - r^2 k - rk^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Las dimensiones para las que el costo del material sea mínimo serán, el radio $r = 2$ centímetros y la altura $h = 6$ centímetros.

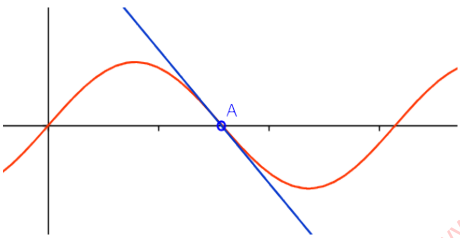
Examinemos la curva representada en la figura (a). Trazando una tangente AB, por ejemplo, vemos que los puntos de la curva contiguos al punto de tangencia A y situados a ambos lados del mismo se hallan más abajo que la tangente. En este caso se dice que la curva tiene *convexidad en el punto* A; si se verifica esta condición para la parte de la curva comprendida entre





los puntos M y N, esta parte recibe el nombre de *convexa*.

Tomemos la curva representada en la figura (b). Aquí observamos otro fenómeno, a saber: los puntos de la curva próximos al punto de tangencia C y situados a ambos lados del mismo se hallan más arriba que la tangente CD. En este caso se dice que la curva tiene *concavidad en el punto* C, y se llama cóncava la parte de la curva comprendida entre los puntos P y Q, que satisface esta condición.



Existen casos en que una parte de la curva es convexa y otra, cóncava; por ejemplo, la figura (c) presenta convexidad (encima del eje 0X) y convexidad (debajo del eje 0X); además, el punto A sirve de frontera entre ellas. La tangente trazada a la curva en este punto es común para la parte convexa y la cóncava. Al mismo tiempo, esta tangente corta la curva en el punto de tangencia; por este motivo, la gráfica no es convexa ni cóncava en el punto A. Este punto recibe el nombre de punto de inflexión.

Definición 8.19 Punto de inflexión
Supongamos que una función $y = f(x)$ está definida en el conjunto $\mathbf{D}$. Si existe tal $k \in \mathbf{D}$, que para cualquier $x \in \mathbf{D}$ alcanza la inflexión de la función, si existe un cambio en el sentido de la concavidad de la curva. Es decir hay un cambio de concavo a convexo o de convexo a concavo.

El témino concavidad y convexidad, quiere decir que la grafica de la función tiene direcciones diferentes de convexidad a la izquierda y a la derecha del punto k.

En el intervalo $(a; b)$ la gráfica de la función f es concava, si la gráfica de esta función se encuentra no por debajo de cualquiera de sus tangentes entre los límtes de dicho intervalo. Es decir

$$f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \text{concavo}$$

En el intervalo $(a; b)$ la gráfica de la función f es convexa, si la gráfica de esta función se encuentra no por encima de cualquiera de sus tangentes entre los límtes de dicho intervalo. Es decir

$$f(x) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \text{convexo}$$

La gráfica de una función puede tener varios puntos de máximo, uno de los cuales puede estar más alto que todos los demás. Con objeto de distinguir dicho punto de entre los demás se le llama máximo absoluto, mientras que a cada uno de los otros se le denomina máximo relativo.

Definición 8.20 Máximo relativo
Se dice que la función $f(x)$ tiene un máximo relativo en k si existe un intervalo con k en su interior, tal que ese intervalo $f(k)$ es el valor máximo de la función.

La expresión función creciente o decreciente, significa obviamente lo que dice, pero debemos establecer con precisión dónde crece o decrece la función.

Definición 8.21 Función creciente y decreciente
Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $\mathbf{D}$, se denomina creciente en este conjunto, si para cualquier par de números x_1 y x_2 de dicho conjunto de la desigualdad $x_1 < x_2$ proviene que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $\mathbf{D}$, se denomina decreciente en este conjunto, si para cualquier par de números x_1 y x_2 de dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) > f(x_2)$.

Definición 8.22 Función no creciente y no decreciente
Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $\mathbf{D}$, se denomina no decreciente en este conjunto, si para cualquier par de números x_1 y x_2 pertenecientes a dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $\mathbf{D}$, se denomina no creciente en este conjunto, si para cualquier par de números x_1 y x_2, pertenecientes a dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Las funciones crecientes, decrecientes, no crecientes y no decrecientes llevan el nombre de funciones monótonas. Las funciones crecientes y decrecientes se llaman estrictamente monótonas.

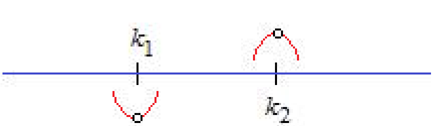
Ejemplo 8.27 *Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida explícitamente como*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

determine los intervalos de monotonía.
Solución
El dominio de esta función son todos los reales. Para encontrar los puntos de máximos y mínimos, hacemos $f(x) = f(k)$:

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{k-1}{k^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{k-1}{k^2+1} = 0$$

$$-\frac{(x-k)[x(k-1)-k-1]}{(x^2+1)(k^2+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k^2-2k-1}{(k^2+1)^2} = 0$$



Resolviendo esta ecuación, obtenemos: $k_1 = 1 - \sqrt{2}$ y $k_2 = 1 + \sqrt{2}$. Haciendo el análisis correspondiente, establecemos que k_1 es punto de mínimo y k_2 es punto de máximo. Para establecer los intervalos de monotonía, procedemos de la siguiente manera: El intervalo $(-\infty;\ k_1)$ es decreciente, $(k_1;\ k_2)$ es creciente y $(k_2;\ +\infty)$ es estrictamente decreciente.

Ejemplo 8.28 *Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida explícitamente como*

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$$

determine los intervalos de monotonía.

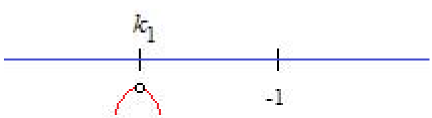
Solución

El dominio de esta función son todos los $x\neq -1$. Para encontrar los puntos de máximos y mínimos, hacemos $f(x)=f(k)$:

$$\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{k^3}{(k+1)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^3}{(x+1)^2}-\frac{k^3}{(k+1)^2}=0$$

$$\frac{(x-k)[x^2(k^2+2k+1)+x(2k^2+k)+k^2]}{(k+1)^2(x+1)^2}=0$$

$$\begin{cases} x-k=0 \\ \dfrac{x^2(k^2+2k+1)+x(2k^2+k)+k^2}{(k+1)^2(x+1)^2}=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=k \\ \dfrac{k^2(k+3)}{(k+1)^3}=0 \end{cases}$$



Resolviendo esta ecuación, obtenemos: $k_1=-3$ y $k_2=0$. Haciendo el análisis correspondiente, establecemos que k_1 es punto de máximo y k_2 es punto de inflexión. Para establecer los intervalos de monotonía, procedemos de la siguiente manera: El intervalo $(-\infty;\ k_1)$ es creciente, $(k_1;\ -1)$ es estrictamente decreciente y $(-1;\ +\infty)$ es estrictamente creciente.

8.7. Tarea

1. Demuestre que la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$:
   a) Con $a>0$ estrictamente decrece sobre $(-\infty;\ -b/2a]$ y estrictamente crece sobre $[-b/2a;\ +\infty)$;
   b) Con $a<0$ estrictamente crece sobre $(-\infty;\ -b/2a]$ y estrictamente decrece sobre $[-b/2a;\ +\infty)$.

2. Demuestre que la función $f(x)=x^3+x$ crece.

3. Demuestre que la función $f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ decrece en cualquier intervalo que no contiene cero.

4. Demuestre que la función $f(x)=\frac{1+x^2}{x}$:
   a) Estrictamente crece sobre $(-\infty;\ -1]$ y sobre $[1;\ +\infty)$;
   b) Estrictamente decrece sobre $[-1;\ 0)$ y sobre $(0;\ 1]$.

5. Encuentre los máximos intervalos sobre los que la función $f(x)=x^4-2x^2-2$:
   a) Crece; **b)** Decrece.

6. Demuestre que la función $f(x) = x^3 + x^2$:
a) Crece sobre $(0;\ +\infty)$; **b)** No es monótona sobre $[-1;\ 0]$.

7. Encuentre la distancia desde la parábola $f(x) = \frac{x^2}{4}$ hasta la recta $y = -x - 2$.

8. Demuestre que la función $y = x^3 - 3a^2x$ crece en los intervalos $(-\infty;\ -a]$ y $[a;\ +\infty)$ y decrece en $[-a;\ a]$, $(a > 0)$.

9. Demuestre que la función $y = x^3 - 3bx^2$ $(b > 0)$ crece en $(-\infty;\ 0]$ y $[2b;\ +\infty)$ y decrece en $[0;\ 2b]$.

10. La velocidad de la sangre que está a r centímetros del eje central de una arteria de radio R es $S(r) = c(R^2 - r^2)$, donde c es una constante positiva. ¿Dónde es mayor la velocidad de la sangre?

11. Un punto luminoso está situado en la línea de los centros de dos esferas y se encuentra fuera de ellas. ¿Con qué posición del punto luminoso será máxima la suma de las áreas de las partes iluminadas de las superficies de las esferas?

12. Un embudo cónico, de radio de base R y altura H está lleno de agua. Una esfera pesada está sumergida en el embudo. ¿Cuál ha de ser el radio de la esfera para que el volumen de agua expulsada del embudo por la parte sumergida de la esfera, sea el mayor posible?

13. Dos cuerpos se mueven por rectas en el sentido hacia su punto de intersección A. Las velocidades de los cuerpos son constantes e iguales a v_1 y v_2, en el momento inicial los cuerpos se hallan a las distancias a y b del punto A, respectivamente. El ángulo entre las direcciones de movimiento de los cuerpos es igual a α. Encuentre la distancia mínima entre ellos.

14. Se desea construir un almacén con un volumen de 100 metros cúbicos que tenga techo plano y base rectangular cuya anchura sea tres cuartas partes de su longitud. El costo por metro cúbico de los materiales es de 36 dólares para el piso, 54 dólares para los lados y 27 dólares para el techo. ¿Qué dimensiones minimizan el costo?

15. Una pista de 400 metros de longitud está formada por dos semicírculos iguales y dos partes rectas también iguales ¿Cuáles son las dimensiones de la pista que encierra la mayor área? La pista encierra tres áreas, un rectángulo y dos semicírculos. ¿Cuáles son las dimensiones de la pista que encierra el rectángulo de mayor área?

16. Hallar el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.

17. Una pila eléctrica que tiene un voltaje fijo V y una resistencia interna fija r se conecta a un circuito que tiene resistencia variable R. Por la ley de Ohm, la corriente I en el circuito es $I = \frac{V}{R+r}$. La potencia de salida P está dada por $P = I^2R$. Demuestre que la potencia

máxima se alcanza cuando $R = r$.

18. ¿A qué altura sobre el centro de una mesa redonda de radio R hay que situar una bombilla eléctrica para que la iluminación del borde de la mesa sea la máxima?

19. En un triángulo está inscrito un rectángulo de forma que uno de sus lados yace en uno de los lados del triángulo y dos vértices, en otros dos. Encuentre el área máxima posible del rectángulo si la del triángulo es igual a A.

20. A las 13:00 horas el barco A se encuentra 30 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas por hora. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas por hora. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

21. Una parábola tiene su vértice situado sobre una circunferencia de radio R, y el eje de la parábola sigue la dirección del diámetro. ¿Cuál ha de ser el parámetro de la parábola para que el área del segmento limitado por la parábola y la cuerda común para ésta y la circunferencia, sea la mayor posible? El área del segmento parabólico simétrico es igual a dos tercios del producto de su base por la altura.

22. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa que tenga la capacidad de 1 metro cúbico. Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material sea mínima, suponiendo que no se desperdicia nada en la construcción. La base circular del recipiente se corta de una hoja cuadrada y el metal restante se desperdicia. Calcule las dimensiones del recipiente para las cuales la cantidad de material necesario en la construcción sea mínima.

23. Dado un cierto punto A en una circunferencia, trazar una cuerda BC paralela a la tangente en el punto A de modo que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

24. Encuentre el radio de la base y la altura de un cono circunscrito a una esfera si el volumen del cono tiene el valor mínimo de los posibles y el radio de la esfera es igual a R.

25. Una carretera que va de norte a sur y otra que va de este a oeste se cruzan en un punto P. Un vehículo que viaja hacia el este a 20 kilómetros por hora, pasa por P a las 10:00 horas. En ese mismo momento un automóvil que viaja hacia el sur a 50 kilómetros por hora se encuentra 2 kilómetros al norte de P. Calcular cuando se encuentran los dos vehículos más cerca uno del otro y cuál es la distancia mínima entre ellos.

26. Un hombre que navega en una barca de remos a 2 millas del punto más cercano de una costa recta, desea llegar a su casa, la cual está en la citada costa a 6 millas de dicho punto. El hombre puede remar a razón de 3 millas por hora y caminar a 5 millas por hora. ¿Qué debe hacer para llegar a su casa en el menor tiempo posible? Si el hombre tiene una lancha a motor que puede viajar a 15 millas por hora, ¿qué debe hacer para llegar en el menor tiempo posible?

27. El volumen de un prisma triangular regular es igual a V. ¿Cuánto debe medir el lado de la base para que su superficie total sea la menor posible?

28. Hallar la relación entre el radio R y la altura H de un cilindro que tiene la menor superficie total posible, conociendo su volumen.

29. El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible.

30. El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura bajada sobre la base sea el mayor posible?

31. Un torpedero está anclado a 9 km del punto más próximo de la orilla. Se necesita enviar a un mensajero al campamento situado en la orilla. La distancia entre éste y el punto más próximo referido, es igual a 15 km. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km/h, y en una barca, remando, 4 km/h, en qué punto de orilla debe desembarcar para llegar al campamento lo más pronto posible.

32. Se va a construir una armazón para embalaje con un trozo de madera con sección cuadrada de 2 por 2 pulgadas y 24 pie de largo. El embalaje va a tener extremos cuadrados. Calcule las dimensiones que producen el máximo volumen exterior.

33. Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que $< (ABC) = \pi/3$. Un automóvil sale del punto A, en el mismo momento del punto B parte un tren. El auto avanza hacia el punto B a 80 kilómetros por hora, el tren se dirige hacia el punto C a 50 kilómetros por hora. Teniendo en cuenta que la distancia $AB = 200$ kilómetros, ¿en qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?

34. Un veterinario cuenta con 30 metros de malla de metal y quiere construir 6 jaulas para perros levantando primero una cerca alrededor de una región rectangular, y dividiendo luego la región en seis rectángulos iguales mediante cinco rejas paralelas a uno de los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la zona rectangular para las que el área total es máxima?

35. Se tenderá un cable desde una central eléctrica situada al lado de un río de 900 metros de ancho hasta una fábrica en el otro lado, 3000 metros río abajo. El costo de tender el cable bajo el agua es \$ 5 por metro, y el costo sobre tierra es \$ 4 por metro. ¿Cuál es la ruta más económica sobre la cual tender el cable?

36. Una banda de hierro, de anchura a, ha de ser encorvada de modo que tome la forma de canalón cilíndrico abierto (la sección del canalón ha de semejarse a un arco de segmento circular). ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo central que se apoya en este arco para que la capacidad del canalón sea la mayor posible?

37. Hallar el cilindro con el volumen máximo entre todos los cilindros inscritos en un cubo con arista a, de forma que el eje de cada cilindro coincida con la diagonal del cubo, en tanto que las circunferencias de las bases hagan contacto con las caras del cubo.

38. Trazar una recta de modo que pase por un punto dado $P(1,4)$ y que la suma de las longitudes de los segmentos positivos cortados por dicha recta en los ejes de coordenadas, sea la menor posible.

39. ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles, de área dada, para que el radio de un círculo inscrito en dicho triángulo sea el mayor posible?

40. Sean dados dos puntos $A(1,4)$ y $B(3,0)$ en la elipse $2x^2+y^2=18$. Hallar el tercer punto C tal que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

41. Dados los dos puntos $F_1(1,0)$ y $F_2(-1,0)$, y el círculo $C=\{(x,y)/x^2+y^2=4\}$:
a) Encuéntrense los puntos P sobre C donde PF_1+PF_2 es un mínimo.
b) Hállense los puntos P sobre C tales que PF_1+PF_2 es un máximo.

42. Una cerca de 8 pie de alto al nivel del suelo va paralela a un edificio alto. La cerca dista 1 pie del edificio. Calcule la longitud de la escalera más corta que se puede apoyar entre el suelo y el edificio por encima de la reja.

43. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble del de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pie cúbicos?

44. Un recipiente con pared vertical de altura h se encuentra sobre un plano horizontal. De un orificio en la pared del recipiente fluye un chorro. Determine la posición del orificio con la que el alcance del chorro será el máximo si la velocidad del líquido que fluye es igual a $\sqrt{2gx}$, donde x es la profundidad del orificio (ley de Torricelli).

45. La fábrica A debe unirse mediante una carretera con la línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, en tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces $(k>1)$ mayor que por el ferrocarril. ¿En qué punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fábrica para que el costo del transporte de las mercancías desde la fábrica A hasta el poblado B sea el mínimo?

46. La cubierta de un escritorio de longitud L se está deslizando de costado alrededor de la esquina rectangular de un pasillo de una habitación de ancho x a otra de ancho y. ¿Cuál es el ancho mínimo y para el que es posible esta maniobra?

47. Se han de fabricar envases cilíndricos de hojalata de volumen prefijado. No se desperdicia material al cortar la hoja que constituye la pared cilíndrica, pero las bases se forman con trozos cuadrados, desperdiciándose los recortes. Hállese la relación entre la altura y el diámetro de los envases, de manera que resulten lo más económicos posible.

48. Se desea que las páginas de un libro tengan un área de 900 centímetros cuadrados con márgenes de 2,5 centímetros abajo y a los lados, y de 1,5 centímetros arriba. Determine las dimensiones de la página que darán la mayor área posible para el texto.

49. Se desea construir un oleoducto de un punto A a otro punto B que distan 10 kilómetros y se encuentran en riberas opuestas de un río de cauce recto de 1 kilómetro de ancho. El oleoducto irá bajo el agua de A a un punto C en la ribera opuesta y luego sobre el suelo de C a B. El costo por kilómetro de tubería bajo el agua es cuatro veces más del costo sobre tierra. Calcule la posición de C que minimizará el costo. Desprecie la pendiente del lecho del río.

50. Determine las dimensiones del rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio r de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro.

51. Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Hallar el tamaño del cuadrado de máxima área que puede circunscribirse al cuadrado dado.

52. Se va a construir un vaso de papel en forma de cono circular recto quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de círculo y radio r, y uniendo después las dos orillas rectas del papel restante. Calcule el volumen del vaso más grande que se pueda construir.

53. Una isla situada a 20 kilómetros de una costa prácticamente recta, tiene que disponer permanentemente el servicio trasbordador para los carros de una ciudad situada a 50 kilómetros costa abajo:
a) Si el trasbordador va a 15 kilómetros por hora y los automóviles a un promedio de 80 kilómetros por hora. ¿Dónde debe localizarse la terminal, en tierra, del trasbordador para que el viaje sea lo más rápido posible?
b) Si el trasbordador va a F kilómetros por hora y los automóviles promedian los C kilómetros por hora. ¿Para qué valores de F/C debe localizarse la terminal exactamente en la ciudad sobre tierra firme para que el viaje sea lo más rápido posible?

54. Calcule el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio r.

55. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado tiene el círculo circunscrito mínimo.

56. Encuentre el punto de la gráfica de $y = x^2 + 1$ más cercano al punto $P(3, 1)$.

57. Dada una esfera de radio R. Hallar el radio r y la altura h del cilindro circular recto de mayor superficie lateral $2\pi rh$ que puede inscribirse en la esfera.

58. La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Halle las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de radio r.

59. Un trozo de madera de 12 decímetros de largo tiene forma de un tronco de cono circular recto de diámetros 4 y $4+h$ decímetros en sus bases, donde $h \geq 0$. Determinar en función de h el volumen del mayor cilindro circular recto que se puede cortar de este trozo de madera, de manera que su eje coincida con el del tronco de cono.

60. Una carretera A que va de norte a sur y otra carretera B que va de este a oeste se cruzan en un punto P. A las 10:00 horas un automóvil pasa por P viajando hacia el norte sobre A a 80 kilómetros por hora. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a 320 kilómetros por hora y a una altura de 8500 metros, pasa exactamente por arriba del punto de la carretera B que se encuentra 160 kilómetros al oeste de P. Suponiendo que el automóvil y el avión mantienen la misma velocidad y dirección, ¿a qué hora se encontrarán más cerca uno del otro?

61. Un tanque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo φ con la recta de la dirección del movimiento, siendo $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la que el bloque presiona perpendicularmente contra el plano. Hallar el ángulo φ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.

62. Hay que construir un silo de forma cilíndrica rematado por una bóveda semiesférica. El coste de construcción por metro cuadrado es doble en la bóveda que en la parte cilíndrica. Hállense las dimensiones, si el volumen se fija de antemano, para que los costes de producción sean mínimos. Despréciese el espesor de la pared y los desperdicios de material.

63. Si la suma de las superficies de un cubo y de una esfera es constante, determínese la relación del diámetro de la esfera a la arista del cubo en los casos de que:
a) Sea mínima la suma de volúmenes; **b)** Sea máxima esta suma.

64. Un alambre de 36 centímetros de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes se ha de doblar en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de un rectángulo cuya longitud es el doble de su anchura. ¿Cómo se debe partir el alambre para que la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo sea máxima.

65. Dos pasillos de 3 y 4 metros de ancho se encuentran formando un ángulo recto. Evalúe la longitud de la barra rígida más larga que puede transportarse horizontalmente dando vuelta a la esquina.

66. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes coordenados el triángulo de menor área posible.

67. Dos ciudades, situadas a un mismo lado de un río rectilíneo, acuerdan construir en la orilla una estación de bombeo y filtrado para el suministro de agua potable a las mismas. Si son A y B las distancias de las ciudades al río, y es C la distancia que las separa, pruébese que la suma de las longitudes de tubería necesaria para unirlas con la estación de bombeo es igual o mayor que $\sqrt{C^2 + 4AB}$.

68. La luz que emana de un foco luminoso A se refleja sobre un espejo plano e incide sobre un punto B. Si es mínimo el tiempo necesario para que la luz vaya desde A al espejo y desde aquí a B. Pruébese que son iguales los ángulos de incidencia y de reflexión.

69. Dos fábricas A y B que se encuentran a 4 millas una de la otra, emiten humo con partículas que contaminan el aire de la región. Suponga que el número de partículas provenientes de cada fábrica es directamente proporcional a la cantidad de humo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fábrica. ¿Qué punto entre A y B tendrá la menor contaminación si la fabrica A emite el doble de humo que la fábrica B?

70. Una pequeña isla está a 2 millas, en línea recta del punto más cercano P de la ribera de un gran lago. Si un hombre puede remar en su bote a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿dónde debe desembarcar para llegar a un pueblo que está 10 millas playa abajo del punto P, en el tiempo mas corto? Suponga que el hombre usa su bote de motor que avanza a 20 millas por hora, ¿dónde debe desembarcar?

71. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1. Hallar el mayor valor de $2a + b$.

72. Un triángulo isósceles tiene base b y lados iguales de longitud a. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en el triángulo de manera que uno de sus lados coinciden con la base del triángulo?

73. Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el área de la ventana es máxima, si el perímetro de la misma debe ser de 12 pie.

74. La intensidad de iluminación que produce un foco en cualquier punto es proporcional a la intensidad del mismo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Si dos focos de intensidades a y b se encuentran a una distancia c, ¿en qué punto de la recta que les une existe un mínimo de intensidad? Supóngase que la intensidad en cualquier punto es la suma de las intensidades debidas a ambos focos.

75. Se desea construir un cilindro juntando los lados AD y BC de un rectángulo de material elástico. Para hacer más resistente el cilindro, se colocará un alambre de longitud fija L según

la diagonal del rectángulo. Calcule el ángulo φ para el cual el volumen del cilindro es máximo.

76. Un barco debe navegar 100 millas río arriba contra una corriente de 10 millas por hora. Sea v la velocidad del barco en millas por hora. El número de galones de gasolina que consume la nave es directamente proporcional a v^2:
a) Demuestre que si se mantiene la velocidad constante de v millas por hora, entonces el número total y de galones de combustible que se consumen está dado por $y = \frac{100kv^2}{v-10}$, donde $v > 10$ y k una constante positiva.
b) Calcule la velocidad que minimiza el número de galones de gasolina que se consumen durante el viaje.

77. Se va a inscribir un cono circular recto dentro de otro cono circular recto de volumen dado, con el mismo eje y con el vértice del cono interior tocando la base del exterior. ¿Cuál debe ser la razón de sus alturas para que el cono inscrito tenga el máximo volumen?

78. Se desea construir una tienda de campaña con forma de pirámide de base cuadrada. Un poste de metal colocado en el centro será el soporte de la tienda. Se cuenta con s pie cuadrados de lona para los cuatro lados del albergue y x es la longitud de la base. Demuestre que:
a) El volumen V de la tienda es $V = \frac{1}{6}x\sqrt{s^2 - x^4}$;
b) V alcanza un valor máximo cuando $x = \sqrt{2}$ veces la longitud del poste.

79. Girando un rectángulo de perímetro p alrededor de uno de sus lados, se genera un cilindro circular recto. Calcule las dimensiones del rectángulo que producen el cilindro de mayor volumen.

80. ¿Cuáles son las dimensiones relativas de un cilindro circular recto, con la máxima superficie curva, que se puede inscribir en una esfera dada?

8.8. Operaciones con funciones

A continuación vamos a estudiar cómo se pueden efectuar operaciones entre funciones para producir otras nuevas. Veremos que estos objetos matemáticos pueden sumarse, multiplicarse, dividirse, y producir así nuevos objetos de esta naturaleza.

Definición 8.23 Suma
Sean $f : \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbf{D}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en los subconjuntos $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ de $\mathbb{R}$, respectivamente. Se define la suma de f y g, como la función $f + g : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$ y dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Así pues, la suma de las funciones f y g es una nueva función $f + g$ cuya imagen en un punto x es la suma de las imágenes de f y g en x. Observe que para poder suma funciones f y g en un punto x, es necesario poder evaluar las funciones f y g en x, de tal modo que x debe pertenecer tanto al dominio de f como al de g. Es por eso que el dominio de la función suma de f y g es la intersección de los dominios de estas dos funciones.

Definición 8.24 Producto
Sean $f : \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbf{D}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones definidas en los subconjuntos* $\mathbf{D}_1$ *y* $\mathbf{D}_2$ *de* $\mathbb{R}$*, respectivamente. Se define el producto de* f *y* g*, como la función* $fg : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida en* $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$ *y dada por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$*.*

Como en el caso de la suma, la función producto de f y g se define como la función cuya imagen en el punto x es el producto de las imágenes de f y g en ese punto. Para poder calcular estas últimas, es necesario que la x se encuentre en el dominio de f y en el de g. Es decir, al igual que la función suma, la función producto tiene por dominio a la intersección de los dominios de las funciones involucradas.

Definición 8.25 Cociente
Sean $f : \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbf{D}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones definidas en los subconjuntos* $\mathbf{D}_1$ *y* $\mathbf{D}_2$ *de* $\mathbb{R}$*, respectivamente. Se define el cociente de* f *entre* g*, como la función* $\frac{f}{g} : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida en* $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2 - \{x \in \mathbf{D}_2 : g(x) = 0\}$ *y dada por* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$*.*

En el caso de cociente, la definición es similar a las dadas anteriormente para la suma y para el producto, sólo que en este caso el dominio de la función cociente presenta un a restricción adicional: debemos eliminar la posibilidad de que el denominador de la nueva función sea cero.

Definición 8.26 Composición
Sean $f : \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbf{D}_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones definidas en los subconjuntos de* $\mathbb{R}$*,* $\mathbf{D}_1$ *y* $\mathbf{D}_2$*, respectivamente, tales que* $g(\mathbf{D}_2) = \{y \in \mathbb{R}/y = g(x), \quad x \in \mathbf{D}_2\} \subseteq \mathbf{D}_1$*. Se define la composición de* f *con* g*, como la función* $f \circ g : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$*.*

Obsérvese la restricción que se establece en la definición sobre los dominios de las funciones f y g. Para poder evaluar la función compuesta $f \circ g$ en un punto x, debemos evaluar primero la función g en x, lo cual nos impone de inmediato la restricción de que tal x debe pertenecer al dominio de g. Sin embargo, esta restricción no es suficiente, pues en la siguiente etapa, para obtener la imagen $(f \circ g)(x)$, debemos evaluar la función f en $g(x)$, lo cual es posible solamente si $y = g(x)$ pertenece al dominio de f.

Así pues, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ está formado por aquellas x que pertenezcan al dominio de g, tales que $y = g(x)$ pertenezca al dominio de f. Es por eso que en la definición se pide que las imágenes de g (el conjunto $g(\mathbf{D}_2)$) pertenezcan al dominio de la función f (es decir, que el conjunto $g(\mathbf{D}_2)$ sea un subconjunto de $\mathbf{D}_1$).

Ejemplo 8.29 *Un estudio ambiental en una determinada comunidad señala que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será* $c(p) = 0,5p + 1$ *partes por millón cuando la población sea de* p *miles. Se estima que dentro de* t *años la población de la comunidad será* $p(t) = 10 + 0,1t^2$ *miles:*
a) *Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.*
b) *¿Cuándo alcanzará el nivel de monóxido de carbono 6,8 partes por millón?*
Solución
a) Puesto que el monóxido de carbono esta relacionado con la variable p por la ecuación $c(p) = 0,5p + 1$ y la variable p está relacionada con la variable t por la ecuación $p(t) = 10 + 0,1t^2$ se desprende que la función compuesta

$$c(p(t)) = c(10 + 0,1t^2) = 0,5(10 + 0,1t^2) + 1 = 6 + 0,05t^2$$

expresa el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función de la variable t.
b) Sea $c(p(t))$ igual a 6,8 y despéjese t para obtener

$$6+0,05t^2=6,8 \;\Rightarrow\; 0,05t^2=0,8 \;\Rightarrow\; t^2=\frac{0,8}{0,05}=16 \;\Rightarrow\; t=4$$

es decir, dentro de 4 años el nivel de monóxido de carbono será 6,8 partes por millón. ©

Ejemplo 8.30 *En cierta industria, el costo total de producción de q unidades durante el periodo diario de producción es $c(q)=q^2+q+900$ dólares. En un día normal de trabajo, se fabrican $q(t)=25t$ unidades durante las primeras t horas de un periodo de producción:*
a) *Exprese el costo total de producción como una función de t.*
b) *¿Cuánto se habrá gastado en producción al final de la tercera hora?*
c) *¿Cuándo alcanzará el costo total de producción \$ 10000?*
Solución
a) Puesto que el costo de producción esta relacionado con la variable q por la ecuación $c(q)=q^2+q+900$ y la variable q está relacionada con la variable t por la ecuación $q(t)=25t$ se desprende que la función compuesta

$$c(q(t))=c(25t)=(25t)^2+25t+900=625t^2+25t+900=c(t)$$

expresa el costo total de producción como una función de la variable t.
b) Al final de la tercera hora, $t=3$, se habrá gastado

$$c(3)=625(3)^2+25(3)+900=\$6600$$

c) Para calcular t cuando el costo total de producción $c(t)=10000$, hacemos

$$10000=625t^2+25t+900 \;\Rightarrow\; t\approx 3,8 \text{ horas. ©}$$

Ejemplo 8.31 *Considere las funciones f y g. Describa las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$, así como los dominios de éstas:*
a) $f(x)=x^2+3x-5$, $g(x)=3x+4$; **b)** $f(x)=\sqrt{x^2+2}$, $g(x)=2x+3$;
c) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$.
Solución
a) Tanto f como g tienen por dominio a todos los reales. En este caso no hay restricción alguna para los dominios de las funciones compuestas: Será también el conjunto de los reales. Tenemos entonces que:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+4)=(3x+4)^2+3(3x+4)-5=9x^2+33x+23$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3x-5)=3(x^2+3x-5)+4=3x^2+9x-11$$

b) Tanto f como g tienen por dominio a todos los reales. En este caso no hay restricción alguna para los dominios de las funciones compuestas: Será también el conjunto de los reales. Tenemos entonces que:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=\sqrt{(2x+3)^2+2}=\sqrt{4x^2+12x+11}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x^2+2})=2\sqrt{x^2+2}+3$$

c) El dominio de la función f esta dada por $x\geq -1$ y el de g es $x\geq 1$. Entonces el dominio de g se encuentra en f. Por tanto

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-1})=\sqrt{\sqrt{x-1}+1}$$

El dominio de esta nueva función esta definido para todas las $x \geq 1$. Para el caso $g \circ f$, tenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{\sqrt{x+1} - 1}$$

cuyo dominio es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$. ©

8.9. Tarea

1. Suponga que f, g y h son funciones tales que $f(1) = 4$, $g(1) = -2$ y $h(1) = -3$. Determine en cada caso la imagen indicada:

a) $(3f - 4g)(1)$;
b) $g(1)[2f(x) + 3h(1)]$;
c) $(f^2 + g^2 + h^2)(1)$;
d) $f(1)[1 + 5g(1)]$;
e) $(f + g)(1)(f + g)(x)$;
f) $\left(\dfrac{(f-5g)(1)}{3h(1)}\right) f(x)$;
g) $\left(\dfrac{2f}{g-3h}\right)(1)$;
h) $\left(\dfrac{3f^2-g}{2g-h^2}\right)(1)$.

2. Sean $f(x) = x + 6$, $g(x) = \frac{6}{x+1}$. Encuentre todos los valores de x para los que se cumple la ecuación:

a) $|f(x) + g(x)| = f(x) + g(x)$;
b) $|f(x) + g(x)| = |f(x)| - |g(x)|$;
c) $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$;
d) $|f(x) + g(x)| = f(x) - g(x)$.

3. Resolver la ecuación $|f(x) - g(x)| = |f(x)| - |g(x)|$, dado $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x - 2$.

4. Dada la expresión $f(x) = ax^2 - bx + 3$, hallar los valores de a y b para los cuales se cumpla la ecuación $f(x - 2) + f(x + 2) = 4x - 2$.

5. Dadas las funciones

$$f(x) = 5x - 2, \quad g(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad h(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Determine en cada caso la imagen indicada:

a) $(2g + 3h)(0)$;
b) $(f^2 - g^2)(1)(h - f)(3x)$;
c) $h(1 + g(1))$;
d) $(3g^2 + h)(1)$;
e) $(fgh)(2)h(2 - x^2)$;
f) $f(1 + 2g(1 + 2h(1)))$;
g) $g(1 - f(1 - h(1)))$;
h) $(2f - 2g)(3g - 3h)(f(1 + f(1)))$;
i) $f(2 - h(2 - x2))$;
j) $(f - g + 3h)(2)$;
k) $\left(\frac{h}{g}\right)(f(f(1)))$;
l) $g(3 + f(2))$;

6. Considere las funciones

$$f(x)\begin{cases} x^2, & x<-1 \\ 2, & x=-1 \\ 5, & -1<x\le 1 \\ x+6, & x>1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x<-2 \\ 3x+2, & -2\le x<2 \\ 1, & x=2 \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$$

Calcule:

a) $(f+g)(1)$; **b)** $(fg)(2)$.

7. Para cada una de las funciones f y g, determine: $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, $f\circ g$, $g\circ f$:

a) $f(x)=3x^2+4x-1,\quad g(x)=5x^2+3x+1$;
b) $f(x)=x+\sqrt{x-1},\quad g(x)=x^2-1$;
c) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1},\quad g(x)=x^2+x$;
d) $f(x)=x^3-x,\quad g(x)=x^4-3x^2-1$;
e) $f(x)=\mathrm{Sgn}(x^2-1),\quad g(x)=\sqrt{x^2-1}$;
f) $f(x)=\sqrt{x-4},\quad g(x)=\sqrt{x-5}$;
g) $f(x)=[x^2-1],\quad g(x)=\dfrac{x+1}{x}$;
h) $f(x)=\left[\dfrac{x^2}{x^2-1}\right],\quad g(x)=|x^2-1|$.

8. Para cada una de las funciones f y g, determine: $f+g$, fg, $f\circ g$, $g\circ f$:

a) $f(x)=\begin{cases} 4x+3, & x<1 \\ x^3, & x\ge 1 \end{cases},\quad g(x)=x+2$;

b) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\ge 1 \end{cases},\quad g(x)=x^2-1$;

c) $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x<-1 \\ 5x, & -1\le x\le 1 \\ 4x-3, & x>1 \end{cases},\quad g(x)=5-2x$;

d) $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases},\quad g(x)=x^2+2$;

e) $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases},\quad g(x)=x^2-2$;

f) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x<0 \\ 2x^2+3, & x\ge 0 \end{cases},\quad g(x)=x+1$;

g) $f(x)=\begin{cases} 4x+3, & x<1 \\ x^3, & x\ge 1 \end{cases},\quad g(x)=x+2$;

h) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -x^2, & x\ge 0 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$;

i) $f(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 1\,, \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases};$

j) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ x^4, & -1 \leq x \leq 1\,, \\ x, & x > 1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ x^5, & 1 \leq x \leq 1\,; \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases},$ $g(x) = \begin{cases} 4x-2, & x < 1 \\ 5x+1, & x \geq 1 \end{cases};$

l) $f(x) = \begin{cases} 5x+4, & x < 0 \\ 3x^2+x, & x \geq 0 \end{cases},$ $g(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases};$

m) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \leq 0 \\ 5x+4, & x > 0 \end{cases},$ $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ 2-x, & x > 0 \end{cases};$

n) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases},$ $g(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 4x+4, & x \geq -1 \end{cases}.$

9. Considere las funciones f, g y h. Describa las funciones $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g \circ h$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$, $h(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

10. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine la función compuesta $(f \circ f)(x)$. ¿En dónde está definida esta función?

11. Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, determine $(f \circ f \circ f)(x)$. ¿En dónde está definida esta función?

8.10. Gráfica de una función

Una de las características importantes que tienen las funciones reales de una variable real es que podemos tener representaciones geométricas de ellas, por medio de una curva en el plano cartesiano, que llamaremos gráfica de la función.

Definición 8.27 Gráfica de una función
Sea $f : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en $\mathbf{D}$. Se denomina gráfica de la función real $y = f(x)$ un conjunto de puntos (x_0, y_0) en el plano que satisface las siguientes condiciones:
a) *Todo punto con las coordenadas (x_0, y_0), donde $y_0 = f(x_0)$, pertenece a este conjunto;*
b) *Todo punto perteneciente a dicho conjunto de puntos tiene tales coordenadas (x_1, y_1), que $y_1 = f(x_1)$.*

Es decir, la gráfica de la función $y = f(x)$ es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y = f(x)$, y no contiene otros puntos.

Si para una función dada $y = f(x)$ se han estudiado todas las propiedades mencionadas anteriormente, suele decirse que se ha realizado el análisis de la función $y = f(x)$. Así pues, al analizar una función, se debe responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el dominio e la función?
2. ¿Cuál es el codominio de la función?
3. ¿Está acotada o no la función?
4. ¿Toma la función los valores máximo y mínimo?
5. ¿Es periódica?
6. ¿Es la función par o impar o ni una ni otra?
7. ¿Tiene la función intervalos, donde es monótona?
8. ¿Hay puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas?
9. ¿Cuál es la gráfica de la función?

Se propone el siguiente método de construcción de las gráficas de funciones, que se basa en el empleo de algunas reglas de construcción, valiéndose de las gráficas de funciones ya conocidas.

Supongamos que se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Construyamos la gráfica de la función $y = f(x - a)$. Esta gráfica puede ser obtenida del modo siguiente: partiendo del punto arbitrario x, en el que la ordenada $f(x)$ se conoce, determinaremos el punto x_1 en el cual la ordenada $f(x_1 - a)$ tiene el mismo valor, es decir, se cumple la igualdad

$$f(x_1 - a) = f(x).$$

Para que se cumpla esta igualdad basta, evidentemente, que se cumpla la igualdad

$$x_1 - a = x$$

de donde encontramos que $x_1 = x + a$.

Regla 1. Para obtener la gráfica de la función $y = f(x - a)$ a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ es necesario la gráfica de la función $y = f(x)$ desplazarla a lo largo del eje 0X en a a la derecha, si $a > 0$, o bien en $|a|$ a la izquierda, si $a < 0$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Vamos a construir la gráfica de la función $y = f(x) + c$.

Regla 2. Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x) + c$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario desplazar la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje 0Y hacia arriba en c, si $c > 0$, o bien en $|c|$ hacia abajo, si $c < 0$.

Se da la gráfica de $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = -f(x)$.

Regla 3. Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = -f(x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario en la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ cambiar el signo por el opuesto. Así pues, la gráfica de la función $y = -f(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ mediante la reflexión directa respecto al eje 0X.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(-x)$.

Regla 4. Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = f(-x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario multiplicar el valor x por -1. Así pues, la gráfica de la función $y = f(-x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ mediante la reflexión directa respecto al eje 0Y.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = kf(x)$.

Regla 5. Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = kf(x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario multiplicar el valor de la ordenada $f(x)$ por el número k.

En este caso debido a la multiplicación de todos los valores de la función $f(x)$ por $k > 1$ las ordenadas de la gráfica de la función aumentan k veces y la gráfica de la función $y = f(x)$ se estira a partir del eje 0X k veces, mientras que debido a la multiplicación por k para $0 < k < 1$ las ordenadas de la gráfica de la función disminuyen k veces y la gráfica de la función $y = f(x)$ se contrae k veces hacia el eje 0X.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(kx)$. Partiendo de un punto arbitrario x en el cual se conoce la ordenada $f(x)$ encontraremos el punto x_1 en el cual la gráfica de la función $y = f(kx_1)$ tiene la misma ordenada, es decir, se cumple la igualdad

$$f(x) = f(kx_1).$$

Para que esta igualdad se cumpla es, evidentemente, suficiente el cumplimiento de la igualdad $x = kx_1$, de donde encontramos $x_1 = \dfrac{1}{k}x$.

Regla 6. Para construir la gráfica $y = f(kx)$ basta dividir el valor de x por el número k.

En este caso debido a la división de todos los valores del argumento de la función $y = f(x)$ por $k > 1$ la gráfica de la función se contrae hacia el eje 0Y, $\frac{1}{k}$ veces y debido a la división por k para $0 < k < 1$ la gráfica de la función se estira a partir del eje 0Y, $\frac{1}{k}$ veces.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyanse la gráfica de la función $y = |f(x)|$. Tenemos

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Regla 7. Para obtener la gráfica de la función $y = |f(x)|$ a partir de la función $y = f(x)$ es necesario dejar sin cambios los trozos de la gráfica $y = f(x)$ que están por encima del eje 0X y reflejar en forma especular respecto al eje 0X los trozos inferiores a este eje.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(|x|)$. Puesto que $f(|-x|) = f(|x|)$, la función $y = f(|x|)$ es par, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje 0Y. Además, para $x \geq 0$, $f(|x|) = f(x)$.

Regla 8. Para obtener la gráfica de la función $y = f(|x|)$ a partir de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ es necesario construir la gráfica de la función $y = f(x)$ para $x \geq 0$ y reflejarla en forma especular respecto al eje 0Y.

Definición 8.28 Asíntota
Si la distancia entre un punto variable sobre una curva y una recta fija se hace y permanece menor que cualquier número preasignado, arbitrariamente pequeño y positivo cuando el punto se aleja infinitamente sobre la curva, se dice que la recta es una asíntota de la curva.

Si una ecuación en x e y se resuelve para y en términos de x, puede ocurrir que un valor de x, digamos a, haga el cero el denominador del miembro derecho sin hacer cero al numerador. Si hay un valor tal de x, no puede usarse, porque ningún valor de y corresponde a él, ya que la división entre cero no es una operación posible. No obstante, si x está suficientemente cerca de a, y es numéricamente mayor que cualquier número preasignado.

Ahora verificaremos que la distancia de la recta $x-a=0$ a un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ sobre una curva, e infinitamente alejada del origen, es tan pequeña como deseemos bajo las condiciones enunciadas anteriormente. La ecuación de la recta, $x-a=0$, está ya en forma normal si $a>0$: por consiguiente, sustituimos en ella las coordenadas de P_1 con objeto de obtener la distancia d y el sentido de la recta a P_1. Así, tenemos $d=x_1-a$; sin embargo, x_1-a es tan pequeña como deseemos porque x_1 está suficientemente cerca de a. El análisis es análogo si a es negativa.

Se puede deducir de manera análoga que $y=b$ es una asíntota de la curva si x llega a ser y permanece mayor que cualquier número preasignado cuando y está suficientemente cerca de b.

Definición 8.29 Asíntotas horizontales y verticales
La recta $x-a=0$ es una asíntota vertical de una curva si $x-a$ es un factor del denominador después que en la ecuación se ha despejado y en términos de x, y se han eliminado todos los factores comunes en el numerador y el denominador.
La recta $y-b=0$ es una asíntota horizontal de una curva si $y-b$ es un factor del denominador después que en la ecuación se ha despejado x en términos de y, y se han eliminado todos los factores comunes en el numerador y el denominador.

Para encontrar las asíntotas horizontales de una curva, hágase el coeficiente de la mayor potencia de x igual a cero y despéjese y. Para encontrar las asíntotas verticales de una curva, hágase el coeficiente de la mayor potencia de y igual a cero y despéjese x.

Para encontrar cualquier intersección de $y=f(x)$ con el eje Y, se hace x igual a cero y se calcula y. Para encontrar cualesquiera intersecciones de $y=f(x)$ con el eje X se hace y igual a cero y se despeja x.

El carácter ilustrativo de la gráfica hace de ella un medio auxiliar insustituible del análisis de una función, pero la gráfica sólo ilustra las propiedades de la función y no las demuestra. A continuación analizaremos los diversos tipos de funciones:

Función constante $y=k$: A cada número real x dicha función pone en correspondencia un mismo número k. La gráfica de la función representa una recta, paralela al eje de abscisas, que dista de este eje a una magnitud $|k|$ y pasa por encima de él, si $k>0$, y por debajo, si $k<0$. Es una función continua en todo el eje real.

Función lineal $y=x$: Si y es función de x a cada valor de x le corresponde un valor determinado de y. Por lo tanto, dando muchos valores diferentes de x hallamos diferentes y correspondientes a ellos y estos pares de valores (x,y) proporcionarán muchos puntos en el plano. Si aumentamos el número de algunos valores de x, tomándolos más cercanos entre sí, al fin y al cabo, estos puntos formarán una curva continua. Esta curva se denomina gráfica de la función.

Consideremos la llamada dependencia lineal $y = mx + b$. Esta ecuación, es llamada ecuación de una recta. El coeficiente m determina el ángulo entre la recta y el eje X. Sustituyendo en la ecuación $x = 0$ obtenemos $y = b$. Esto significa que uno de los puntos de la recta es el punto $(0, b)$; este punto está situado en el eje Y a la altura b sobre el origen de coordenadas. Si $b < 0$, el punto estará situado debajo del origen de coordenadas. Así pues, b es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y, $|b|$ es la longitud del segmento cortado por la recta en el eje de las ordenadas. Para construir una recta correspondiente a una ecuación dada, no es necesario calcular las coordenadas de un gran número de puntos y marcarlas en la gráfica: está claro que si se construyen dos puntos, así mismo queda determinada por completo la recta que pasa a través de éstos.

La dependencia $y = x$ se denomina directamente proporcional. Se comprueba con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

1. El dominio es $(-\infty; +\infty)$;
2. El codominio es $(-\infty; +\infty)$;
3. La función no está acotada ni inferior ni superiormente;
4. La función no toma ni el valor máximo, ni tampoco el mínimo;
5. La función no es periódica;
6. La función es impar;
7. La función es creciente en todo el intervalo $(-\infty; +\infty)$;
8. El punto $(0, 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Función potencial $y = x^k$: Las funciones estudiadas anteriormente, representan casos particulares de la función potencial. A continuación vamos estudiar otros casos:

1. $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$:
   a) El dominio es $(-\infty; +\infty)$;
   b) El codominio es $[0; +\infty)$;
   c) La función está acotada inferiormente: $y \geq 0$;
   d) La función toma su valor mínimo $y = 0$ cuando $x = 0$;
   e) La función no es periódica;
   f) La función es par;
   g) La función no es monótona en todo el dominio, pero es decreciente en el intervalo $(-\infty; 0]$ y creciente en el intervalo $[0; +\infty)$;
   h) El punto $(0, 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.
2. $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$:
   a) El dominio es $(-\infty; +\infty)$;
   b) El codominio es $(-\infty; +\infty)$;
   c) La función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) La función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) La función no es periódica;

f) La función es impar;

g) La función es creciente en todo el dominio;

h) El punto (0, 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

3. $y = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}$:

a) El dominio es $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

b) El codominio es $(0; +\infty)$;

c) La función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) La función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) La función no es periódica;

f) La función es par;

g) La función no es monótona en todo el dominio, pero crece en el intervalo $(-\infty; 0)$ y decrece en el intervalo $(0; +\infty)$;

h) No hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

4. $y = x^{-2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$:

a) El dominio es $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

b) El codominio $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

c) La función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) La función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) La función no es periódica;

f) La función es impar;

g) La función no es monótona en todo el dominio, pero decrece en el intervalo $(-\infty; 0)$ y, además, en el intervalo $(0; +\infty)$;

h) No hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

5. $y = x^{k}$, $k > 0$, $k \notin \mathbb{Z}$:

a) El dominio es $[0; +\infty)$;

b) El codominio es $[0; +\infty)$;

c) La función está acotada inferiormente: $y \geq 0$;

d) La función toma el valor mínimo $y = 0$ para $x = 0$;

e) La función no es periódica;

f) La función no es par ni tampoco impar;

g) La función es creciente en todo el dominio;

h) El punto (0, 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

6. $y = x^{-k}$, $k > 0$, $k \notin \mathbb{Z}$:

a) El dominio es $(0; +\infty)$;

b) El codominio es $(0; +\infty)$;

c) La función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) La función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) La función no es periódica;

f) La función no es par ni tampoco impar;

g) La función es decreciente en todo el dominio;

h) No hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

Algunas funciones poseen características especiales comunes que permiten agruparlas y llamarlas de algún modo específico.

Definición 8.30 Función algebraica
Una función $f : \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es algebraica, si las operaciones que la función hace con la variable x, para obtener su imagen $f(x)$ son solamente algebraicas (sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a potencias, extraer raíces). En caso contrario se dice que la función es trascendente.

Definición 8.31 Función polinomial
Sea n un número entero no negativo. Una función polinomial de grado n es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, en donde a_0, a_1, ..., a_n son números reales dados (llamados coeficientes de la función) y $a_n \neq 0$.

Definición 8.32 Función racional
Una función racional es un cociente de dos funciones polinomiales. Es decir, es una función del tipo $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, en donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones polinomiales.

Función parte entera $y = [x]$: La función parte entera, se define en el dominio de los números reales. A cualquier x de este dominio, la función asocia el máximo entero algebraicamente menor o igual que x. En entero asociado con x se designa escribiendo este símbolo como $[x]$. Tiene la propiedad de ser menor o igual que x, mientras que el entero siguiente es mayor que x; es decir: $[x] \leq x \leq [x] + 1$. Es decir $[x]$ es el número entero mayor que no sobrepasa x. En cada intervalo $[n; n+1)$, donde $n \in \mathbb{Z}$, la función dada es constante e igual a n. Es evidente la razón de denominar a toda función de este tipo función escalonada. De acuerdo con esto se ha representado su gráfica.

Función signo $y = \mathrm{Sign}(x)$: Por definición

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

La función no es par ni impar.

Construcción de la gráfica de la función $y = |f(x)|$ según la gráfica de la función $y = f(x)$. Recordemos ante todo la definición:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

Supongamos que el punto $P(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, sea $y_0 = f(x_0)$. Analicemos dos casos:

1. $y_0 \geq 0$. Entonces, por cuanto $|f(x_0)| = f(x_0) = y_0$, el punto $P(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = |f(x)|$.

2. $y_0 < 0$. Entonces, por cuanto $|f(x_0)| = -f(x_0) = -y_0$, el punto $Q(x_1, -y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = |f(x)|$.

Por consiguiente, la gráfica de la función $y = |f(x)|$ se obtiene a partir de la gráfica para la función $y = f(x)$ del modo siguiente: Todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$, dispuestos en el eje $0X$ y por arriba de éste, quedan en su lugar. Todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$, dispuestos por debajo del eje $0X$, se aplican simétricamente respecto del eje $0X$. Observemos que la gráfica de la función $y = |f(x)|$ no tiene puntos por debajo del eje $0X$.

Adición de gráficas: Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En la parte común de sus dominios queda definida la función $y = f(x) = g(x)$. Supongamos que el punto $P(x_0, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, y el punto $Q(x_0, y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = g(x)$, con la particularidad de que el número x_0 pertenece a la parte común de los dominios de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En este caso el punto $R(x_0, y_1 + y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$. Quiere decir, para construir la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$ es necesario:
a) Dejar aquellos puntos de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en los que x integra la parte común de los dominios de estas funciones.
b) Para cada tal x realizar la adición algebraica de las ordenadas de estas dos gráficas.

Multiplicación de gráficas: Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Entonces, en la parte común de sus dominios queda definida la función $y = f(x)g(x)$. Supongamos que el punto $P(x_0, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, y el punto $Q(x_0, y_2)$, a la gráfica de la función $y = g(x)$. Está claro que el número x_0 pertenece a la parte común de los dominios de la función $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En este caso el punto $R(x_0, y_1y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)g(x)$. Quiere decir, para construir la gráfica de la función $y = f(x)g(x)$ es necesario:
a) Dejar aquellos puntos de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, en los cuales x integra la parte común de los dominios de estas funciones.
b) Para cada tal x realizar la multiplicación de las ordenadas de estas dos gráficas.

División de gráficas: Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Para obtener la gráfica de la función $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a partit de las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es necesario dividir los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en los puntos donde $g(x) \neq 0$.

Composición de gráficas: Se da la gráfica de la función $u = g(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f[g(x)]$. Para construir la gráfica de la función $y = f[g(x)]$ es necesario primero construir la gráfica de la función $u = g(x)$ y luego conociendo las propiedades de la función $y = f(u)$, construir la gráfica de la función compuesta $y = f[g(x)]$.

Ejemplo 8.32 *Un fabricante puede producir grabadoras a un costo de \$ 20 cada una. Se estima que si éstas se venden a x dólares cada una, los usuarios comprarán $120 - x$ grabadoras al mes. Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio, elabore la gráfica de esta función y calcule el precio óptimo de venta.*

Solución

Expresamos en palabras la relación deseada

$$\text{Utilidad} = (\text{cantidad de grabadoras vendidas})(\text{utilidad por grabadora})$$

A continuación reemplazamos las palabras por expresiones algebraicas

$$\text{Cantidad de grabadoras vendidas} = 120 - x$$

Y puesto que las grabadoras se producen a un costo de \$ 20 cada una y se venden a x dólares cada una, se desprende que

$$\text{Utilidad por grabadora} = x - 20$$

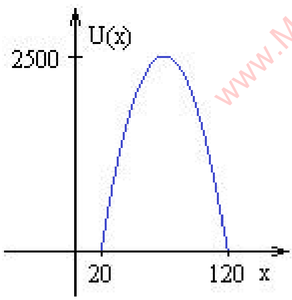
Si $U(x)$ es la utilidad, se concluye que

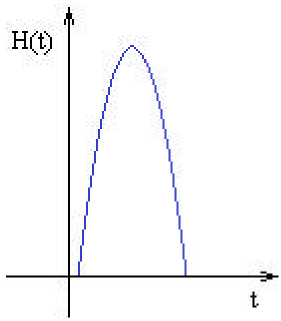
$$U(x) = (120 - x)(x - 20) = -x^2 + 140x - 2400$$

Para graficar esta función, debemos hacer el siguiente análisis: Encontramos los puntos de corte con el eje X, es decir (20, 0) y (120, 0).
Calculamos los puntos de máximo de la siguiente manera

$$-x^2 + 140x - 2400 = -k^2 + 140k - 2400 \quad \Rightarrow \quad (x - k)(x + k - 140) = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $k = 70$. Por tanto, tenemos que (70, 2500). Con estos datos, procedemos a elaborar la gráfica de la función dada. El precio óptimo para vender las grabadoras es de \$ 70.





Ejemplo 8.33 *Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad de 160 pies por segundo, su altura (en pies), t segundos después, está dada por la función* $H(t) = -16t^2 + 160t$*:*

a) *Elabore la gráfica de la función* $H(t)$*.*

b) *¿Cuándo llegará al suelo el objeto?*

c) *Calcule qué altura alcanzará el objeto.*

Solución

a) El dominio de la función son todos los reales, $t \in \mathbb{R}$. La función no es par ni impar. Los puntos de corte con el eje t son $(0, 0)$ y $(10, 0)$. El punto de corte con el eje $H(t)$ es $(0, 0)$. A continuación procedemos a calcular los puntos de máximo y mínimo:

$$-16t^2 + 160t = -16k^2 + 160k \quad \Rightarrow \quad (t - k)(t + k - 10) = 0$$

resolviendo esta ecuación, obtenemos $k = 5$. Haciendo las comprobaciones, obtenemos que $(5, 400)$ es un punto de máximo.

b) El objeto llegara al suelo cuando $H(t) = 0$, es decir:

$$0 = -16t^2 + 160t \quad \Rightarrow \quad 0 = t^2 - 10t \quad \Rightarrow \quad t(t-10) = 0$$

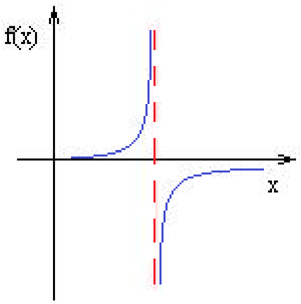
resolviendo esta ecuación, tenemos que $t = 10$ segundos.

c) Con el punto de máximo obtenido en el literal a), podemos asegurar que cuando $t = 5$, la altura alcanzada por el objeto es

$$H(5) = -16 \cdot 5^2 + 160 \cdot 5 = 400 \text{ pies.}$$

Ejemplo 8.34 *Suponga que durante un programa nacional para inmunizar a la población contra cierto tipo de gripe, los funcionarios de salud pública encontraron que el costo de vacunación del $x\,\%$ de la población era aproximadamente $f(x) = \dfrac{150x}{200-x}$ millones de dólares. Represente la función de manera gráfica y especifique qué segmento de ésta es pertinente para la situación práctica en consideración.*

Solución



Para representar gráficamente esta función, debemos hacer el análisis completo. El dominio de la función está dado por $x \in \mathbb{R}\backslash\{200\}$. El codominio de la función está dado por $f(x) \in \mathbb{R}\backslash\{-150\}$. La curva no tiene puntos de máximo ni mínimo.

La función no es par ni impar. Tiene una asíntota vertical en $x = 200$ y una asíntota horizontal en $f(x) = -150$. Con todos estos datos, ya podemos trazar la gráfica de la función.

Para la situación práctica en consideración, debemos considerar el tramo de curva que está determinada en el primer cuadrante, por cuanto, el rango de vacunación es $0 < x < 200$.

8.11. Tarea

1. Encuentre la función lineal si:
   a) $y(1) = 0$, $y(0) = -2$; **b)** $y(-1) = 2$, $y(1) = -1$; **c)** $y(5) = 3$, $y(-2) = 1$.

2. Encuentre la función cuadrática si:
   a) $y(-1) = 0$, $y(0) = 5$, $y(6) = -7$; **b)** $y(-2) = 2$, $y(1) = -1$, $y(3) = 7$;
   c) $y(-6) = 7$, $y(-3) = -8$, $y(2) = 7$.

3. Encuentre el polinomio $p(x)$ de un grado no mayor que tres que satisfaga las condiciones $p(-2) = 1$, $p(-1) = 6$, $p(0) = 5$, $p(1) = 10$.

4. Graficar las siguientes expresiones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$; **c)** $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$; **e)** $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x^2+3x-9}$;

   b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$; **d)** $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-x-3}$; **f)** $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$;

g) $f(x) = (x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$;

h) $f(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-6}$;

i) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4-1}$;

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x-3}}$;

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3}}$;

l) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x+1}$;

m) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$;

n) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x^2+3x-9}$;

o) $f(x) = \dfrac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$;

p) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2+7x-6}$;

q) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-3}$;

r) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x-4}$;

s) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-2}$;

t) $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2-4}$;

u) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3}$;

v) $f(x) = \dfrac{2x^2-x-15}{2x^2-3x-5}$;

w) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2+x-6}$;

x) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$;

y) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^3-2x^2-5x+6}$;

z) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x+2}$.

5. Graficar las siguientes expresiones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2-1}}$;

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x-1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$;

d) $f(x) = \dfrac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$;

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2-1}}$;

f) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{2}$;

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2-4}{x^3}}$;

h) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(3x-2)^2}{x-1}}$;

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-x-3}}$;

j) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$;

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-2}}$;

l) $f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2}$;

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}}$;

n) $f(x) = \dfrac{4\sqrt{|x-1|}}{x-2}$;

o) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$;

p) $f(x) = \sqrt{3}\dfrac{(3x-2)^2}{x-1}$;

q) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$;

r) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$;

s) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2-4}{x^2}}$;

t) $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$;

u) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$;

v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+9}}{x+1}$;

w) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$.

Capítulo 9

Funciones exponenciales y logarítmicas

9.1. Expresiones exponenciales y logarítmicas

Analicemos los problemas principales que surgen al estudiar las potencias:

1. Sean dados los números reales a y k. Hállese un número real x tal, que $x = a^k$. Este es un problema de elevación de un número real a potencia. Es resoluble para cualquier número positivo a y cualquier número real k. Si $a = 0$ y $k > 0$, entonces $x = 0$.

2. Sean dados los números reales b y k. Hállese un número real x tal, que se verifique $x^k = b$. Si b es número positivo cualquiera y k es cualquier número real distinto de cero, el problema se reduce al anterior, pues la respuesta la da el número $x = b^{\frac{1}{k}}$. En efecto,

$$x^k = \left(b^{\frac{1}{a}}\right)^a = b^{\frac{1}{k}k} = b^1 = b.$$

   Si $k = 0$ y $b = 1$, entonces la solución de este problema es un número real x distinto de cero. Si $k = 0$ y $b \neq 1$, este problema no tiene solución.

3. Sean dados los números reales a y b. Hállese un número real x tal, que se verifique $a^x = b$. Se estudiará este problema sólo para a y b reales y positivos. Si $a = 1$ y $b = 1$, a título de solución de este problema interviene cualquier número real x. Si $a = 1$ y $b \neq 1$, el problema no tiene solución. Analicemos el caso en que $a \neq 1$.

Teorema 9.1 *Para todo par de números reales a y b tales, que $a > 0$, $a \neq 1$, y $b > 0$, existe un número real, y sólo uno, x tal, que $a^x = b$.*

Demostración

Supongamos que existen unos números reales x_1 y x_2 tales, que $a^{x_1} = b$ y $a^{x_2} = b$. Según la propiedad de transitividad de las igualdades tenemos $a^{x_1} = a^{x_2}$, implica que $x_1 = x_2$, lo que se trataba de demostrar.

Definición 9.1 Logarítmo de un número

Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$, un número real k recibe el nombre de logaritmo del número b de base a y se denota $k = log_a b$, si $a^k = b$.

El logaritmo se define solamente para un número positivo de base positiva y distinta de la unicidad, es decir, para cualquier $a \leq 0$, $a = 1$ y para todo $b \leq 0$ el concepto de logaritmo está privado de sentido. Así pues, en la definición de logaritmo $\log_a b$ tenemos siempre $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. De la definición de logaritmo se deduce la identidad logarítmica fundamental $a^{\log_a b}$. Haciendo uso de la definición de logaritmo, obtenemos $\log_a a = 1$, y $\log_a 1 = 0$. Teniendo en cuenta la unicidad del logaritmo podemos constatar que si $c > 0$ y $c \neq 1$, entonces siempre $\log_a c \neq 0$.

Procedemos a considerar las propiedades más importantes del logaritmo:

Teorema 9.2 *Suponga que los números M, N y a son tales que $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$. Entonces*

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

Demostración
Examinemos

$$\begin{aligned} a^{\log_a MN} &= MN \\ &= a^{\log_a M} a^{\log_a N} \\ &= a^{\log_a M + \log_a N}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$a^{\log_a MN} = a^{\log_a M + \log_a N}.$$

Al aplicar a la última igualdad, las propiedades de las potencias, obtenemos

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

Teorema 9.3 *Suponga que los números M, N y a son tales que $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$. Entonces*

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

Teorema 9.4 *Suponga que los números M, a, k son tales que $M > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, mientras que k es un número real cualquiera. Entonces*

$$\log_a M^k = k \log_a M.$$

Demostración
Examinemos

$$\begin{aligned} a^{\log_a M^k} &= M^k \\ &= \left(a^{\log_a M}\right)^k \\ &= a^{k \log_a M}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$a^{\log_a M^k} = a^{k \log_a M}.$$

Al aplicar a la última igualdad, las propiedades de las potencias, obtenemos

$$\log_a M^k = k \log_a M.$$

Teorema 9.5 *Suponga que los números M, a, k y r son tales que $M > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, mientras que k y r son números reales cualesquiera ($r \neq 0$). Entonces*

$$\log_{a^r} M^k = \frac{k}{r} \log_a M.$$

Demostración
Examinemos

$$\begin{aligned}
(a^r)^{\log_{a^r} M^k} &= M^k \\
&= \left(a^{\log_a M}\right)^k \\
&= a^{k \log_a M} \\
&= \left[(a^r)^{\frac{1}{r}}\right]^{k \log_a M} \\
&= (a^r)^{\frac{k}{r} \log_a M}.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$(a^r)^{\log_{a^r} M^k} = (a^r)^{\frac{k}{r} \log_a M}.$$

Aplicando a la última ecuación las propiedades de las potencias, obtenemos

$$\log_{a^r} M^k = \frac{k}{r} \log_a M.$$

Teorema 9.6 *Suponga que los números M, a, b son tales que $M > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Entonces*

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}.$$

Demostración
Examinemos

$$\begin{aligned}
a^{\log_a M} &= M \\
&= b^{\log_b M} \\
&= \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b M} \\
&= a^{\log_a b \log_b M}.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a b \log_b M}.$$

Aplicando a la última ecuación las propiedades de las potencias, obtenemos

$$\log_a M = \log_a b \log_b M.$$

Conforme a la propiedad de las igualdades, ambos miembros de esta igualdad podemos multiplicarlos por $\frac{1}{\log_a b}$ (puesto que $b \neq 1$, tenemos $\log_a b \neq 0$) y convencernos de que es válida la igualdad

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}.$$

Teorema 9.7 *Suponga que los números M, N, a, son tales que $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Entonces*

$$\log_a M = \log_a N \quad \Rightarrow \quad M = N.$$

Demostración
De acuerdo con la identidad logarítmica fundamental, tenemos

$$M = a^{\log_a M} \qquad \text{y} \qquad N = a^{\log_N}$$

por consiguiente

$$M = N \quad \Leftrightarrow \quad a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \qquad (1)$$

Según las propiedades de las potencias, tenemos

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a M = \log_a N \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que

$$M = N \quad \Leftrightarrow \quad \log_a M = \log_a N.$$

Ejemplo 9.1 *Simplifique la expresión:*

$$\left(\sqrt{2}\right)^{3\log_{\sqrt{2}}5 - 2\log_{\sqrt{2}}25 - \log_{\sqrt{2}}10 + 2\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \left(\sqrt{2}\right)^{3\log_{\sqrt{2}}5 - 2\log_{\sqrt{2}}5^2 - \log_{\sqrt{2}}10 + 2\log_{\sqrt{2}}5^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{3\log_{\sqrt{2}}5 - 4\log_{\sqrt{2}}5 - \log_{\sqrt{2}}10 + \log_{\sqrt{2}}5} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{-\log_{\sqrt{2}}10} = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.2 *Simplifique la expresión:*

$$4^{3\log_4 2} - (1,5)^{\log_{\frac{3}{2}} 3 - 1}.$$

Solución

$$A = 4^{\log_4 2^3} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 3 - \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2}} = 2^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 2} = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6.$$

Ejemplo 9.3 *Simplifique la expresión:*

$$\log_2 \sqrt[3]{16} + \log_8 \sqrt[4]{2} - \log_3 27\sqrt{3} - \log_5 \sqrt{5\sqrt{5}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \log_2 2^{\frac{4}{3}} + \log_{2^3} 2^{\frac{1}{4}} - \log_3 3^{\frac{7}{2}} - \log_5 5^{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{4}{3}\log_2 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\log_2 2 - \frac{7}{2}\log_3 3 - \frac{3}{4}\log_5 5 \\
&= \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{7}{2} \cdot 1 - \frac{3}{4} \cdot 1 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{7}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{17}{6}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.4 *Simplifique la expresión:*

$$9^{2\log_3 2+4\log_{81}2}\cdot\sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 16}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= [9^{2\log_3 2+4\log_{3^4}2}\cdot\sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 2^4}}\\
&= 9^{2\log_3 2+\log_3 2}\cdot\sqrt{3^{2+2\log_3 2}}\\
&= \left(3^2\right)^{3\log_3 2}\cdot 3^{1+\log_3 2}=3^{6\log_3 2}\cdot 3^{1+\log_3 2}\\
&= 3^{7\log_3 2}\cdot 3=3^{\log_3 2^7}\cdot 3=2^7\cdot 3=384.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.5 *Simplifique la expresión:*

$$72\,\log_2\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2}+10\,\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right).$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= 72\,\log_2 5^{-\frac{1}{2}}\cdot\log_{5^2}2^{\frac{1}{3}}+10\,\log_2 2^{-\frac{2}{5}}\\
&= 72\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\log_2 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\log_5 2+10\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\log_2 2\\
&= -36\log_2 5\cdot\frac{1}{6}\log_5 2+10\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\log_2 2\\
&= -6\,\log_2 5\cdot\log_5 2-4=-6-4=-10.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.6 *Simplifique la expresión:*

$$\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2\sqrt[5]{16}}}{\sqrt{2}}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}9\sqrt[3]{3}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= \log_2\left(\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{9}{10}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)+\log_{2^{-1}}\left(\frac{2^2}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}+\log_{3^{-\frac{1}{2}}}\left(3^2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\\
&= \log_2 2^{\frac{16}{15}}+\log_2 2^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{7}{3}\log_3 3=\frac{16}{15}\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2-\frac{14}{3}\\
&= \frac{16}{15}+\frac{1}{2}-\frac{14}{3}=-\frac{31}{10}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.7 *Simplifique la expresión:*

$$72\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4}\right).$$

Solución

$$\begin{aligned}
A &= 72\,\left(\left(7^2\right)^{\log_7\sqrt{9}-\log_7 6}+5^{-\log_{5^{\frac{1}{2}}}2^2}\right)=72\,\left(7^{2\log_7\frac{1}{2}}+5^{-4\log_5 2}\right)\\
&= 72\,\left(7^{\log_7\left(\frac{1}{2}\right)^2}+5^{\log_5 2^{-4}}\right)=72\,\left(\frac{1}{4}+2^{-4}\right)=72\cdot\frac{5}{16}=\frac{45}{2}.
\end{aligned}$$

Teorema 9.8 *Suponga que los números M, N, a, son tales que $M > 0$, $N > 0$, $a > 1$. Entonces, si la base es mayor que la unidad, al menor de dos números positivos le corresponde el logaritmo menor y al menor logaritmo le corresponde el número menor. Es decir:*

$$\log_a M < \log_a N \quad \Rightarrow \quad M < N.$$

Demostración
De acuerdo con la identidad logarítmica fundamental, tenemos

$$M = a^{\log_a M} \qquad \text{y} \qquad N = a^{\log_N}$$

por consiguiente

$$M < N \quad \Leftrightarrow \quad a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \qquad (3)$$

Según las propiedades de las potencias, tenemos

$$a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \quad \Leftrightarrow \quad \log_a M < \log_a N \qquad (4)$$

De (3) y (4) se deduce que

$$M < N \quad \Leftrightarrow \quad \log_a M < \log_a N.$$

Teorema 9.9 *Suponga que los números M, a, r son tales que $M > 0$, $0 < a < 1$. Entonces, si la base es mayor que la unidad, al menor de dos números positivos, le corresponde el logaritmo mayor y al logaritmo mayor le corresponde el número menor. Es decir:*

$$\log_a M < \log_a N \quad \Rightarrow \quad M > N.$$

Teorema 9.10 *Suponga que los números M, a, r son tales que $M > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, mientras que r es un número real cualquiera ($r \neq 0$). Entonces*

$$\log_{a^r} M^r = \log M.$$

Teorema 9.11 *Suponga que los números a, b son tales que, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Entonces*

$$\log_a b = \log_b a = 1.$$

Definición 9.2 Logarítmos de base 10 y base e
Los logaritmos de base 10 se denominan decimales y en lugar de la designación $log_{10}M$ se escribe $logM$. Los logaritmos de base e (e es un número irracional, cuyo valor aproximado es 2,718281828459045...) se denominan naturales, y en lugar de la designación log_eN se escribe lnN.

Ejemplo 9.8 *Demuéstrese que si a, b y c son números reales que satisfagan la condición $0 < b \leq c < a - 1$, entonces se verifica la desigualdad*

$$\log_a (a + b) < \log_{(a-c)} a.$$

Solución
Por cuanto $a > 0$ y $c \geq b > 0$, resulta evidente la validez de la desigualdad

$$a^2 - (c - b)a - bc < a^2,$$

la cual puede ser escrita de la manera siguiente:

$$(a + b)(a - c) < a^2. \qquad (5)$$

Como $a > 1$, podemos aprovechar una de las propiedades y obtener la desigualdad

$$\log_a (a+b)(a-c) < 2, \qquad (6)$$

que es equivalente a la desigualdad (5).
Haciendo uso de la propiedad 1, obtenemos la desigualdad

$$\log_a (a+b) + \log_a (a-c) < 2, \qquad (7)$$

que es equivalente a la desigualdad (6).
Cada sumando en el primer miembro de la desigualdad (5) es positivo, puesto que $a+b > 1$ y $a-c > 1$. Por consiguiente, elevando al cuadrado los miembros primero y segundo de la desigualdad (7), obtenemos una desigualdad equivalente.
Por eso, la desigualdad (7) es equivalente a la desigualdad

$$[\log_a (a+b) + \log_a (a-c)]^2 < 4,$$

la cual es equivalente a la desigualdad siguiente

$$[\log_a (a+b) - \log_a (a-c)]^2 < 4 - 4\log_a (a+b) \log_a (a-c). \qquad (8)$$

La desigualdad (8) es equivalente a la desigualdad (5), la cual es verdadera, por consiguiente, será verdadera también la desigualdad (8).
Dado que, para $b > 0$, $c > 0$, se verifica la desigualdad

$$0 < [\log_a (a+b) - \log_a (a-c)]^2, \qquad (9)$$

podemos valernos de la propiedad de transitividad de las desigualdades.
En este caso la validez de las desigualdades (8) y (9) predetermina la validez de la desigualdad

$$0 < 4 - 4\log_a (a+b) \log_a (a-c),$$

que puede ser escrita en la forma

$$\log_a (a+b) \log_a (a-c) < 1.$$

Al aplicar la propiedad correspondiente y al tener presente que $a-c > 1$ y $a > 1$, concluimos que la desigualdad de partida es verdadera.

9.2. Tarea

1. Utilizando las propiedades de los logaritmos, simplifique la expresión $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$.

2. Calcular $\log 25$, si $\log 2 = a$.

3. Calcular $\log_3 18$, si $\log_3 12 = a$.

4. Calcular $\log_{49} 16$, si $\log_{14} 28 = a$.

5. Calcular $\log_{12} 60$, si $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$.

6. Calcular $\log 1250$, si $\log 2 = 0,3010$.

7. Calcular $\log_{100} 40$, si $\log_2 5 = a$.

8. Calcular $\log_6 16$, si $\log_{12} 27 = a$.

9. Calcular $\log_3 5$, si $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$.

10. Calcular $\log_{35} 28$, si $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

11. Calcular $\log_6 3,38$, si $\log 2 = a$, $\log_{13} = b$.

12. Calcular $\log_2 360$, si $\log_3 20 = a$, $\log_3 15 = b$.

13. Calcular $\log_{12} 60$, si $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$.

14. Demuestre las identidades:

a) $\log_{ab} n = \dfrac{\log_a n \log_b n}{\log_a n + \log_b n}$; **b)** $\dfrac{\log_a n}{\log_{ab} n} = 1 + \log_a b$; **c)** $\log_{bn} an = \dfrac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$.

15. Utilizando las propiedades de los logaritmos, simplifique las expresiones:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{9} + \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} 9 - \log_{\frac{1}{8}} \sqrt[4]{32} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[3]{128\sqrt{2}}$;

b) $\log_3 27 - \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\dfrac{64}{27}\right)$;

c) $2 \log_5 \sqrt[4]{5} + \dfrac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2$;

d) $\log^2_{\sqrt[5]{5}} \sqrt{5} - \log_{\sqrt[5]{5}} \left(5\sqrt{5}\right) + \log_{(1+\sqrt{3})} \left(4 + 2\sqrt{3}\right)$;

e) $\left[\log_{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{5}\right)\right] \sqrt{\log_{\frac{1}{5}} \left(5\sqrt{5}\right) + \log_{\sqrt{5}} \left(5\sqrt{5}\right)}$;

f) $\log_{0,4} \left(\dfrac{1}{5} \sqrt[3]{50}\right) + \log_{0,6} \left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right) + \log_{0,32} \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)$;

g) $\left(\log_{\sqrt{5}} 125 \div \log_5^2 25\right) \left(\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} \div \log_{0,2} \sqrt[3]{25}\right)$;

h) $(0,1)^{2 \log 0,1 - 1,5 \log 0,1} \cdot (0,1)^{-\left[\log\left(\frac{8}{3}\right) + 2 - \log 20\right]}$;

i) $\left[\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{1}{4}} + 6 \log_{\frac{1}{4}} \left(\dfrac{1}{2}\right) - 2 \log_{\frac{1}{16}} \left(\dfrac{1}{4}\right)\right] \div \log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{8}$;

j) $\dfrac{\log_2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_2^2 \sqrt{7}} - \dfrac{2 \log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{7}} - \log_{\sqrt[6]{7}} \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$;

k) $\left[\log_8 27 - \log_{0,5}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\left(\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}\right);$

l) $\frac{\log_{\sqrt{2}} 16}{\log_4 \sqrt{2}}\left[\log_{\sqrt{2}}\left(2\sqrt[4]{2}\right) + 100^{\frac{1}{2}\log 8 - 2\log 2}\right].$

16. Utilizando las propiedades de los logaritmos, simplifique la siguiente expresión:

a) $10^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 5 + \log 2}\cdot 7^{\log_{3\sqrt{3}} 27};$

b) $3^{1+\log_3 4} + 2^{\log_2 3 - 2};$

c) $2^{\log_5 3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\log_5 2,5}\cdot\log_9 2\cdot\log_4 81;$

d) $3^{\frac{2}{5}\log_3 32 - \frac{1}{3}\log_3 64 + \log_3 10};$

e) $2^{3-\log_4 3} + 7^{1+2\log_7 2};$

f) $(0,2)^{\frac{1}{2}(9\log_{0,2} 2 - 3\log_{0,2} 4)}.$

17. Utilizando las propiedades de los logaritmos, simplifique la siguiente expresión:

a) $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}} + \log_{\sqrt[3]{4}}\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}}};$

b) $\log_2\left(\frac{1}{4\sqrt{4}}\right) + \log_3\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}\right) + \log_4\left(\frac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}}\right) - \log_7\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}\right);$

c) $\frac{\log_3 81}{\log_3 9}\left(36^{1-\log_6 2} + 49^{-\log_7 6}\right);$

d) $3^{\frac{1}{5\log_5 3}}\cdot(\log 2 + \log 5 + \log 300 - \log 3);$

e) $\frac{1}{2}\left(9^{1+\log_{25} 5} - 3^{2\left(\frac{1}{4}+\log_{16} 2\right)}\right) - \log_{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\right);$

f) $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2}}}} + \log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}.$

9.3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Definición 9.3 Ecuación exponencial
Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces, la ecuación $a^x = b$ se denomina ecuación exponencial elemental.

El dominio natural de definición para la función $y = a^x$ es el conjunto de todos los números reales. Es decir, es el intervalo $(-\infty; +\infty)$. La función $y = a^x$ es estrictamente monótona en el conjunto $(-\infty; +\infty)$ y el codominio esta representado por el intervalo $(0; +\infty)$. Por consiguiente, la ecuación $a^x = b$ no tiene raíces, cuando cada b es no positivo, mientras que para cada b positivo la ecuación $a^x = b$ tiene una raíz única que se denotará x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación $a^x = b$, es válida la igualdad numérica $a^{x_1} = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = \log_a b$.

Así pues, para cada b no positivo la ecuación $a^x = b$ no tiene raíces, y para cada b positivo tiene una raíz única $x_1 = \log_a b$.

En la siguiente tabla se exponen los resultados de la resolución de la ecuación $a^x = b$.

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x = b$	$x_1 = \log_a b$	No hay solución	No hay solución

Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces la ecuación $\log_a x = b$ se denomina ecuación logarítmica elemental.

El dominio natural de la función $y = \log_a x$ es el conjunto de todos los números positivos. Es decir, es el intervalo $(0; +\infty)$. La función $y = \log_a x$ es estrictamente monótona en el conjunto $(0; +\infty)$ y el codominio está representado por toda la recta numérica $(-\infty; +\infty)$.

Por eso, para todo b la ecuación $\log_a x = b$ tiene una raíz única que se denotará con x_1. Por cuanto x_1 es la raíz de la ecuación $\log_a x = b$, es válida la igualdad numérica $\log_a x = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = a^b$. Por consiguiente para cada b la ecuación $\log_a x = b$ tiene la raíz única $x_1 = a^b$.

En la siguiente tabla se exponen los resultados de la resolución de la ecuación $\log_a x = b$.

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$\log_a x = b$	$x_1 = a^b$	$x_1 = 1$	$x_1 = a^b$

Existen ecuaciones que no se resuelven aplicando solamente transformaciones equivalentes; al resolver las ecuaciones mucho más a menudo tenemos que aplicar transformaciones no equivalentes.

Sea a un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$:

1. $f(x) = a^{\log_a f(x)}$;
2. $\log_a f^2(x) = 2\,\log_a f(x)$;
3. $\log_a f^2(x) = 2\,\log_a[-f(x)]$;
4. $\log_a[f(x)g(x)] = \log_a f(x) + \log_a g(x)$;
5. $\log_a f(x)g(x) = \log_a[-f(x)] + \log_a[-g(x)]$;
6. $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a f(x) - \log_a g(x)$;
7. $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a[-f(x)] - \log_a[-g(x)]$.

Sea a un número fijo positivo cualquiera, distinto de la unidad. Sea dada la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. La sustitución de esta ecuación por la ecuación $f(x) = g(x)$ se denomina potenciación de la ecuación.

Al realizar la potenciación de una ecuación, no se pueden perder raíces, sino sólo adquirir extrañas. Por esta razón, si al resolver una ecuación, se realiza la potenciación, resulta necesaria la comprobación al final de la resolución.

Ejemplo 9.9 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
a) $9^x \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x} = \sqrt{27^x} \cdot \sqrt[3]{81^{x+3}}$; **b)** $5^{x+3} - 2 \cdot 5^{x+2} = 375$;
c) $3 \cdot 4^{x-2} = 2\left(256 - 16^{\frac{x+1}{2}}\right)$.
Solución
a) $3^{2x} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-3x} = 3^{\frac{3x}{2}} \cdot 3^{\frac{4(x+3)}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3^{2x} \cdot 3^{3x-2} = 3^{\frac{3x}{2}} \cdot 3^{\frac{4(x+3)}{3}}$

$$3^{5x-2} = 3^{\frac{17x+24}{6}} \quad \Rightarrow \quad 5x - 2 = \frac{17+24}{6} \quad \Rightarrow \quad 13x - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{36}{13}.$$

b) $5 \cdot 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} = 375 \quad \Rightarrow \quad (5-2)5^{x+2} = 375 \quad \Rightarrow \quad 5^{x+2} = 125$

$$5^{x+2} = 5^3 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

c) $3 \cdot 4^x \cdot \dfrac{1}{16} = 512 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad 4^x\left(\dfrac{3}{16} + 8\right) = 512 \quad \Rightarrow \quad 4^x = \dfrac{16 \cdot 512}{131}$

$$x \ln 4 = \ln\left(\frac{8192}{131}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \ln_4\left(\frac{8192}{131}\right).$$

Ejemplo 9.10 *Resuelva las siguientes ecuaciones:*
a) $\log_{0,5}(x+1) - \log_{0,5}(x-3) = 1$; **b)** $\log_4(x^2-1) - \log_4(x-1)^2 = \log_4\sqrt{(2-x)^2}$.
Solución
a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2 = x - 3 \quad \Rightarrow \quad x = -5.$
La raíz obtenida no es solución de la ecuación.
b) $\log_4 \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} = \log_4\sqrt{(2-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} = \sqrt{(2-x)^2}$

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \pm(2-x) \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \pm(2-x) \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} = \pm(2-x)$$

$$x + 1 = \pm(2-x)(x-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+1 = (2-x)(x-1) \\ x+1 = -(2-x)(x-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene por solución $x = 2 + \sqrt{3}$.

9.4. Tarea

1. Resuelva las ecuaciones:

a) $4^{2x} = 32^{x-2}$;
b) $4^x + 64 = 16 \cdot 2^x$;
c) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$;
d) $3^{2x+1} = 81$;
e) $2^{x+1} \cdot 2^x = 64$;
f) $2^{x+1} + 2^x = 15$;
g) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = -6$;
h) $3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x-1} = 2205$;
i) $7^{x+2} - 7^{x+1} + 7^x = 43$;
j) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-2} - 151 = 0$;
k) $2^{x+2} + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 70$;
l) $5^{2x+1} + 9 \cdot 5^x - 2 = 0$;
m) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$;
n) $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} = -1$;
o) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$;
p) $4^{2x-1} = 13 \cdot 4^{x-2} - 21$;
q) $2^{2x+6} + 4(4^{2x} - 8^{x+1}) = 0$;
r) $3 \cdot 13^x + 13^{x+1} - 2^{x+2} = 5 \cdot 2^{x+1}$;

s) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0;$

t) $5^x - 32 = \frac{108 - 139 \cdot 5x}{25^x};$

u) $\left(\frac{5}{9}\right)^{2x-7} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{9}\right)^{1-3x}};$

v) $\sqrt[4]{512} = 8^{3x} 2^{1-x};$

w) $6^x - 2^{x-1} 3^{x-2} = 2\sqrt{5^{log_5 289}};$

x) $2^x(2^{3x} - 2x + 2) = 2 \cdot 8^x - 1;$

y) $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}};$

z) $3\sqrt{2^{x-31}} - 5\sqrt{2^{x-35}} - 32 = 0.$

2. Resuelva las ecuaciones:

a) $3^{x^2-4} = 5^{2x};$

b) $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x;$

c) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0;$

d) $2^x + 0,5^{2x-3} - 6 \cdot 0,5^x = 1;$

e) $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0;$

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x;$

g) $(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10^x};$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64};$

i) $2^{x^2} 5^{x^2} = 0,001(10^{3-x})^2;$

j) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/x} = \frac{9}{16};$

k) $0,6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3;$

l) $\sqrt{2x\sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{1/x}}} = 4\sqrt[3]{2};$

m) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950;$

n) $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288;$

o) $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0;$

p) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2;$

q) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0;$

r) $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}};$

s) $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} - 80 = 0;$

t) $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0;$

u) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0;$

v) $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} - 35 \cdot 7^x = 0;$

w) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1};$

x) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4;$

y) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x;$

z) $2 \cdot 4^x + 25^{x+1} = 15 \cdot 10^x.$

3. Resuelva las ecuaciones:

a) $16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x;$

b) $56 \cdot 4^{x-1} - 53 \cdot 14^x + 2 \cdot 49^{x+0,5} = 0;$

c) $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0;$

d) $2^x - 2 \cdot 0,5 \cdot 2^x - 0,5^x + 1 = 0;$

e) $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8;$

f) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6;$

g) $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 4;$

h) $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1;$

i) $|x|^{x^2-2x} = 1;$

j) $(x - 2)^{x^2-x} = (x - 2)^{12};$

k) $(3x - 4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x};$

l) $3^x + 4^x = 5^x;$

m) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0.$

4. Resuelva las ecuaciones:

a) $3^{\sqrt{x^2}+2} - 3^{\sqrt{x^2}+1} - 3^{\sqrt{x^2}-1} = 68;$

b) $2 \cdot 5^{x+1} - \frac{1}{5} \cdot 4^{x+2} - \frac{1}{3} \cdot 5^{x+2} = 3 \cdot 4^{x-1};$

c) $3(10^x - 6^{x+2}) + 4 \cdot 10^{x+1} = 5(10^{x-1} + 6^{x-1});$

d) $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2 - \sqrt{3})};$

e) $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}};$

f) $\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18;$
g) $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4;$

5. Resuelva las ecuaciones:

a) $\log(5-x) + \log(2x-3) = \log 5;$
b) $3 - \log 125 = (x^2 - 5x + 9)\log 2;$
c) $\log x + \log 50 = \log 1000;$
d) $\log x + \log(x+20) = 2;$
e) $\log x = 1 + \log(22 - x);$
f) $\log(54 - x^3) = 3\log x;$
g) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2;$
h) $\log_x(2x^2 - 4x + 3) = 2;$
i) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6;$
j) $x + \log(1+2x) = x\log 5 + \log 6;$
k) $\log_2(4x+4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3);$
l) $\log_{(x-6)^2}(x^2 - 5x + 9) = \dfrac{1}{2};$
m) $\log(2x-3)^2 - \log(3x-1)^2 = 2;$
n) $\log_2(x+4) = (\log_2 7 - \log_2 5)\log_2 4;$
o) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1);$
p) $\log_9(x^2 + 2x - 3) = \log_9 \dfrac{x-1}{x+3};$
q) $\log_4\left[(x-1)^{\log_4 (x-1)^2}\right] = 2;$
r) $\dfrac{\log 2 + \log(4 - 5x - 6x^2)}{\log(2x-1)} = 3;$
s) $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4;$
t) $\log_{\sqrt{2}}\left|\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}\right| = 0;$
u) $\sqrt{\log_2 x^4} + 4\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{x}} = 2;$
v) $\dfrac{\log(3x-5)}{3x^2+25} = \dfrac{1}{2};$
w) $\dfrac{\log(2x-5)}{x^2-8} = \dfrac{1}{2};$
x) $\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x);$
y) $\log(x+4) + \log(2x+3) = \log(1-2x);$
z) $\log_2(x^2 - 1) = \log_{1/2}(x-1).$

6. Resuelva las ecuaciones:

a) $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x);$
b) $\log^2 x + \log x + 1 = \dfrac{7}{\log \frac{x}{10}};$
c) $\log^2 x^3 - \log(0,1x^{10}) = 0;$
d) $(1 - \log 2)\log_5 x = \log 3 - \log(x-2);$
e) $\log(20 - x) = \log^3 x;$
f) $x^{1-\log x} = 0,01;$
g) $\log_x(3x^{\log_6 x} + 4) = 2\log_5 x;$
h) $\log_5(5^{1/x} + 125) = \log_5 6 + 1 + \dfrac{1}{2x};$
i) $\log_4 \dfrac{2}{x-1} = \log_4(4-x);$
j) $\log_3[(x-1)(2x-1)] = 0;$
k) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{4} = -2;$
l) $\log(x+1,5) = -\log x;$
m) $\log(4,5 - x) = \log 4,5 - \log x;$
n) $\log_{x^2}(x+2) = 1;$
o) $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30;$
p) $\log_{x-2}(2x-9) = \log_{x-2}(23 - 6x);$
q) $\log_{5x-2} 2 + 2\log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x+1);$
r) $\log_5(3x - 11) + \log_5(x - 27) = 3 + \log_5 8;$
s) $\dfrac{1 - \log x}{x} = \dfrac{\log^2 14 - \log^2 4}{\log 3,5^x};$
t) $\log_2(x+1)^2 + \log_2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 6;$
u) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5-x)} = 3;$
v) $\dfrac{\log 2 + \log(4 - 5x - 6x^3)}{\log\sqrt[3]{2x-1}} = 3;$
w) $\log_{1/5}\log_5\sqrt{5x} = 0;$
x) $\log_{1/2}\log_8 \dfrac{x^2 - 2x}{x-3} = 0;$
y) $\log_4\log_2\log_3(2x-1) = \dfrac{1}{2};$
z) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1.$

7. Resuelva las ecuaciones:

a) $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4;$

b) $1 + \log_x \dfrac{4-x}{10} = (\log x^2 - 1)\log_x 10;$

c) $1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10-x) = \dfrac{2}{\log_4 x};$

d) $\log_{x+\frac{1}{8}} 2 = \log_x 4;$

e) $\log_3(-x^2 - 8x - 14) \cdot \log_{x^2+4x+4} 9 = 1;$

f) $0,1\log^4 x - \log^2 x + 0,9 = 0;$

g) $\dfrac{1}{5 \cdot 4\log(x+1)} + \dfrac{5}{1+4\log(x+1)} = 2;$

h) $4 - \log x = 3\sqrt{\log x};$

i) $\log^2(100x) + \log^2(10x) = 14\log x + 15;$

j) $\dfrac{1-\log^2 x}{\log x - 2\log^2 x} = \log x^4 + 5;$

k) $\log_x 5\sqrt{5} - \dfrac{5}{4} = \log_x^2 \sqrt{5};$

l) $\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0;$

m) $\log_x 2 + \log_2 x = 2,5;$

n) $\log_{1/2}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8;$

o) $\log(x^2-8) \cdot \log(2-x) = \dfrac{\log_5(x^2-8)}{\log_5(2-x)};$

p) $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5;$

q) $x^{\log_3 x + 1} = 9x;$

r) $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0;$

s) $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1);$

t) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{3x+3}(3x+7) = 2;$

u) $0,4^{\log^2 x + 1} = 6,25^{2-\log x^3};$

v) $1,25^{1-\log_2^2 x} = 0,64^{2\log_2 2x};$

w) $x^{\log x} = 1000xr;$

x) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10;$

y) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4;$

z) $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}.$

8. Resuelva las ecuaciones:

a) $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} - \dfrac{1}{x} = 0;$

b) $\log_x(2x^{x-2} - 1) + 4 = 2x;$

c) $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x + 1} = 1;$

d) $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1};$

e) $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5;$

f) $\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5\sqrt{3-x}};$

g) $|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3;$

h) $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}.$

9. Resuelva las ecuaciones:

a) $\log_{(x-1)^2}(x^2 - 4x + 4) = 2 + \log_{(x-1)^2}(x+5)^2;$

b) $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2;$

c) $\log\left(3^{\sqrt{4x+1} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}\right) = 2 - \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}\log 4 + \dfrac{\log 16}{4};$

d) $\log_6(x+1) = \log_6(1-x) + \log_6(2x+3);$

e) $\dfrac{1}{5 - 4\log(x+1)} = 3 - \dfrac{1}{1+\log(x+1)};$

f) $\sqrt{2\left(\log_2 \dfrac{x^2}{64} - 1\right)}\,(2 + \log_4 8x) = \log_2 2x;$

g) $\log_{2x-1}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{3x-1}(4x^2 - 4x + 1) = 2;$

h) $\log_{5x-1}(10x^2 - 7x + 1)^4 = 2 + \log_{2x-1}(25x^2 - 10x + 1);$

i) $\log(x^2 - 7x + 3) - \log(2x+1) = \log(x^2 + 7x - 3) - \log(2x-1);$

j) $\log(x-2) + \log(x-3) = 1 - \log 5;$

k) $\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18.$

l) $\log_{0,5} x^2 - 14\log_{16x} x^2 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0;$

m) $\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18;$

n) $\log(x^3 + 27) - 0,5\log(x^2 + 6x + 9) = 3\log\sqrt[3]{7};$

o) $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20);$

p) $) \log_{1/2} \sqrt{1+x} + 3\log_{1/4}(1-x) = \log_{1/16}(1-x^2)^2 + 2;$

q) $\log_2 \log_3(x^2-16) - \log_{1/2} \log_{1/3} x^2 - 16 = 2;$

r) $3\log_{16}(\sqrt{x^2+1}+x) + \log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = \log_{16}(4x-1) - 0,5;$

s) $x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 2x - 2} + (x+2)^{\log_{(x+2)^2} 4 = 3} = 3;$

t) $\log(3^x - 2^{4-x}) = 2 + 0,25\log 16 - 0,5x\log 4;$

u) $3\log 2 + \log(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = \log(0,4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4) + 1.$

10. Resuelva los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \\ 3^x 2^y = 576 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40 \\ 64^{x+y} = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \\ \log\sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 \\ x + y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 2^{y-x}(x+y) = 48 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y + \log x = \frac{2}{\pi} ArcSen 1 \\ x^y = 2^{2\log_{0,5} 10} \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ 2\log x - \log y = 2\log 2 + \log 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = \frac{2}{\pi}\left(ArcSen\frac{1}{\sqrt{2}} + ArcCos\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-y} \\ 3^{\log_9 x} = \frac{y}{3} \end{cases}$

l) $\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30 \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5} \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x^{y-2} = 4 \\ x^{2y-3} = 64 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{5/2} \\ \log_4 y \cdot_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

s) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$

t) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{x/2} - 2^y = 7 \end{cases}$

v) $\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$

w) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$

y) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

z) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ xy = 16 \end{cases}$

11. Resuelva los sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log(x^2+y^2)-1=\log 13 \\ \log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26 \\ xy=64 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x\cdot 4^y=32 \\ \log(x-y)^2=2\log 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10^{2-\log(x-y)}=25 \\ \log(x-y)+\log(x+y)=1+2\log 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-(\sqrt[4]{2})^{x-y}=12 \\ 3^{\log(2y-x)}=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log_5 x+3^{\log_3 y}=7 \\ x^y=5^{12} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3(2\log_{y^2} x-\log_{1/x} y)=10 \\ xy=81 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log_{0,5}(y-x)+\log_2 \frac{1}{y}=-2 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3^{y-x}(x+y)=\frac{5}{27} \\ 3\log_3(x+y)=x-y \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^x=y^{9y} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \log_4 xy+\frac{3\log_4 x}{\log_4 y}=0 \\ \log_4 \frac{x}{y}-\log_4 x\cdot\log_4 y=0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \log_2(x+y)+2\log_3(x-y)=5 \\ 2^x-5\cdot 2^{0,5(x+y-1)}+2^{y+1}=0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} \log_2(10-2^y)=4-y \\ \log_2 \frac{x+3y-1}{8y-x}=\log_2(x-1)-\log_2(3-x) \end{cases}$

o) $\begin{cases} \log x\cdot\log(x+y)=\log y\cdot\log(x-1) \\ \log y\cdot\log(x+y)=\log x\cdot\log(x-y) \end{cases}$

p) $\begin{cases} 4^{x+y}=27+9^{x-y} \\ 8^{x+y}-21\cdot 2^{x+y}=27^{x-y}+7\cdot 3^{x-y+1} \end{cases}$

q) $\begin{cases} x\cdot 2^{x+1}-2\cdot 2^y=-3y\cdot 4^{x+y} \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1 \end{cases}$

9.5. Desigualdades exponenciales y logarítmicas

Definición 9.4 Desigualdades potenciales
Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces las desigualdades

$$\begin{cases} a^x>b \\ a^x<b \end{cases}$$

se denominan desigualdades potenciales elementales.

Si b es un número no positivo, entonces, tomando en consideración que en el intervalo $(-\infty;+\infty)$ la función es positiva, concluimos que el intervalo $(-\infty;+\infty)$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x>b$, mientras que la desigualdad $a^x<b$ no tiene soluciones. Si b es un número positivo, se analizan dos casos:

CASO 1: Sea $a>1$. En toda la recta numérica, es decir, en el intervalo $(-\infty;+\infty)$ la función $y=a^x$ es creciente, por lo cual cada valor numérico de $(0;+\infty)$ ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x=x_0\in(-\infty;+\infty)$ la función toma el valor b, entonces para cada $x>x_0$ toma un valor superior a b, y para cada $x<x_0$, un valor inferior a b. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x>b$ será el intervalo $(x_0;+\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x<b$, el intervalo $(-\infty;x_0)$, donde $x_0=\log_a b$.

CASO 2: Sea $0<a<1$. El intervalo $(-\infty;+\infty)$, es decir, en toda la recta numérica la función $y=a^x$ decrece. Por eso, razonando de forma semejante, concluimos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x>b$ es el intervalo $(-\infty;x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x < b$ es el intervalo $(x_0; +\infty)$, donde $x_0 = \log_a b$.

Así pues, si $a > 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x > b$ es:

1. El conjunto $(\log_a b; +\infty)$, para cada b positivo.
2. El conjunto $(-\infty; +\infty)$, para cada b no positivo; el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x < b$ es:
   a) El conjunto $(-\infty;\ \log_a b)$, para cada b positivo.
   b) Un conjunto vacío, para cada b no positivo.

Si $0 < a < 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $a^x > b$ es:

1. El conjunto $(-\infty;\ \log_a b)$, para cada b positivo.
2. El conjunto $(-\infty; +\infty)$, para cada b no positivo; el conjunto de todas las solucio-nes de la desigualdad $a^x < b$ es:
   a) El conjunto $(\log_a b;\ +\infty)$, para cada b positivo.
   b) Un conjunto vacío, para cada b no positivo.

En la siguiente tabla se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades $a^x > b$ y $a^x < b$.

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x > b,\ \ a > 1$	$(\log_a b;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
$a^x < b,\ \ a > 1$	$(-\infty;\ \log_a b)$	No hay soluciones	No hay soluciones
$a^x > b,\ \ 0 < a < 1$	$(-\infty;\ \log_a b)$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
$a^x < b,\ \ 0 < a < 1$	$(\log_a b;\ +\infty)$	No hay soluciones	No hay soluciones

Ejemplo 9.11 *Resuelva las inecuaciones:*

a) $5^{x^2+3x} \leq 125 \cdot 5^x$; **b)** $3^{\sqrt{x+1}} \geq 81\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}$; **c)** $5^{\sqrt{7x}-\frac{\sqrt{7x}+1}{\sqrt{7x}-1}} \geq 125\sqrt{5}$.

Solución

a) $5^{x^2+3x} \leq 5^3 \cdot 5^x \quad\Rightarrow\quad 5^{x^2+3x} \leq 5^{x+3} \quad\Rightarrow\quad x^2+3x \leq x+3$

$$x^2+2x-3 \leq 0 \quad\Rightarrow\quad (x+3)(x-1) \leq 0 \quad\Rightarrow\quad x \in [-3;\ 1].$$

b) $3^{\sqrt{x+1}} \geq 3^4 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{20-x}{4}}} \quad\Rightarrow\quad 3^{\sqrt{x+1}} \geq 3^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{20-x}{4}} \quad\Rightarrow\quad 3^{\sqrt{x+1}} \geq 3^{4-\frac{20-x}{4}}$

$$3^{\sqrt{x+1}} \geq 3^{\frac{x-4}{4}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x+1} \geq \frac{x-4}{4} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 16(x+1) \geq (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x(x-24) \leq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in [0;\ 24] \end{cases}$$

La solución de esta inecuación se obtiene intersecando ambas soluciones parciales. Es decir: $x \in [0;\ 24]$.

c) $5^{\frac{7x-2\sqrt{7x}-1}{\sqrt{7x}-1}} \geq 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad 5^{\frac{7x-2\sqrt{7x}-1}{\sqrt{7x}-1}} \geq 5^{\frac{7}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{7x-2\sqrt{7x}-1}{\sqrt{7x}-1} \geq \frac{7}{2}$

$$\frac{7x-2\sqrt{7x}+5}{\sqrt{7x}-1} \geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)}{\sqrt{x}-\frac{\sqrt{7}}{7}} \geq 0$$

Por lo tanto, la solución esta dada por: $x \in \left[\frac{1}{28};\ \frac{1}{7}\right) \cup \left[\frac{25}{7};\ +\infty\right)$.

Definición 9.5 Desigualdades logarítmicas
Sea a un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces las desigualdades

$$\begin{cases} \log_a x > b \\ \log_a x < b \end{cases}$$

se denominan desigualdades logarítmicas elementales.

Como las propiedades de la función $y = \log_a x$, que se emplean al resolver estas desigualdades, son diferentes para $a > 1$ y para $0 < a < 1$, entonces tenemos dos casos:

CASO 1: Sea $a > 1$. En el intervalo $(0; +\infty)$ la función $y = \log_a x$ es creciente, por lo cual cada valor numérico ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in (0; +\infty)$ la función toma el valor b, entonces para cada $x > x_0$ tal, que $x \in (0; +\infty)$ la función toma un valor mayor que b, y para cada $x < x_0$ tal, que $x \in (0; +\infty)$, ella toma un valor menor que b. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x > b$ es el intervalo $(x_0; +\infty)$, y el de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x < b$, el intervalo $(0; x_0)$, donde $x + 0 = a^b$.

CASO 2: Sea $0 < a < 1$. En el intervalo $(0; +\infty)$ la función $y = \log_a x$ decrece. Por eso, razonando de forma semejante, concluimos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x > b$ es el intervalo $(0; x_0)$ y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x < b$, el intervalo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = a^b$.

Así pues, si $a > 1$, entonces para cada b el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x > b$ se representa por el intervalo $(a^b;\ +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x < b$, es el intervalo $(-\infty;\ a^b)$; si $0 < a < 1$, entonces para cada b el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x > b$ será el intervalo $(0;\ a^b)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\log_a x < b$, es el intervalo $(a^b;\ +\infty)$.

En la siguiente tabla se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades $\log_a x > b$ y $\log_a x < b$.

	$-\infty < b < +\infty$
$\log_a x > b,\ \ a > 1$	$(a^b;\ +\infty)$
$\log_a x < b,\ \ a > 1$	$(0;\ a^b)$
$\log_a x > b,\ \ 0 < a < 1$	$(0;\ a^b)$
$\log_a x < b,\ \ 0 < a < 1$	$(a^b;\ +\infty)$

Ejemplo 9.12 *Resuelva las inecuaciones:*
a) $\log_{0,3}(x^2+1) < \log_{0,3}(2x-5)$; **b)** $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$.
Solución
a) Aplicando las propiedades de los logarítmos, tenemos

$$\log_{0,3}(x^2+1) - \log_{0,3}(2x-5) < 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{0,3}\frac{x^2+1}{2x-5} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{2x-5} < 1$$

$$\frac{x^2+1}{2x-5} - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-2x+6}{2x-5} < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty;\ \frac{5}{2}\right)$$

Otra condición está dada por $2x - 5 > 0$, de donde $x > \frac{5}{2}$. Por tanto, la solución de la inecuación es $x = \oslash$.

b) Análogamente al inciso anterior, tenemos

$$\log_2 \frac{(x-1)^2}{2x-4} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2x-4} > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-6x+9}{2x-4} > 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{2x-4} > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$$

Otras condiciones son las suientes:

$$x-1>0 \quad \Rightarrow \quad x>1, \quad 2x-4>0 \quad \Rightarrow \quad x>2$$

Por tanto, la solución está dada por: $x \in (2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

9.6. Tarea

1. Resuelva las inecuaciones:

a) $5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4}$;

b) $\dfrac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-5} < 3$;

c) $\dfrac{4-7\cdot 5^x}{5^{2x+1}-12\cdot 5^x+4} \leq \dfrac{2}{3}$;

d) $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5} \geq 5$;

e) $\dfrac{15-2\cdot 13^{x+1}}{6\cdot 13^{2x}-13^{x+1}+6} > 2$;

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$;

g) $\dfrac{1}{3^x+2} \geq \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$;

h) $4^x < 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$;

i) $35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} < 6+3^{4-3x}$;

j) $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4\cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$;

k) $5^{2x+1}+6^{x+1} > 30+5^x\cdot 30^x$;

l) $3\cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}} > 4^{\frac{3x}{2}} + 2^{x-\sqrt{x}}$;

m) $2^{2x+1}-21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2>0$;

n) $18\cdot 3^{x+2\sqrt{x+1}} > 3^{3x-2\sqrt{x+1}} - 7\cdot 3^{2x}$;

o) $11^{3x-2}+13^{3x-2} \geq 13^{3x-1}-11^{3x-1}$.

2. Resuelva las inecuaciones:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{2^{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$;

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x+2|} \geq 81$;

c) $8^x+18^x-2\cdot 27^x>0$;

d) $(x^2+x+1)^x<1$;

e) $2^x \geq 11-x$;

f) $6^{3-x}<216$;

g) $2^x\cdot 5^x > 0,1(10^{x-1})^5$;

h) $\dfrac{1}{3^x+5} < \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$;

i) $0,04^{5x-x^2-8} < 625$;

j) $0,5^{x-2}>6$;

k) $0,4^{x^2-1} > 0,6^{x^2+6}$;

l) $4^{x+1,5}+9^x<9^{x+1}$;

m) $1-3^{|x^2-x|}<9$;

n) $|x-3|^{2x^2-7x}>1$;

o) $8^{x+1}-8^{2x-1}>30$;

p) $2^{2+x}-2^{2-x}>15$;

q) $5^{2x+1}>5^x+4$;

r) $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$;

s) $\sqrt{9^x-3^{x+2}} > 3^x-9$;

t) $36^x-2\cdot 18^x-8\cdot 9^x>1$;

u) $4^{2x+1}+2^{2x+6}<4\cdot 8^{x+1}$;

v) $0,3^{2+4+6+\ldots+2x} > 0,3^{72}$;

w) $5^{3\sqrt{x}}+5<5^{\sqrt{x}+1}+5^{\sqrt{x}}$;

x) $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$;

y) $\sqrt{3^{x-64}}-7\sqrt{3^{x-58}} \leq 162$;

z) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1$.

3. Resuelva las inecuaciones:

a) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$;

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{13x^2} \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\dfrac{25}{9}\right)^{-6x^2}$;

c) $\dfrac{1}{0,5^x-1} - \dfrac{1}{1-0,5^{x+1}} \geq 0$;

d) $2^{4x}-2^{3x+1}-2^{2x}-2^{x+1}-2 \leq 0$;

e) $0,008^x + 5^{1-3x} + 0,04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30,04;$

f) $\sqrt{2(5^x+24)} - \sqrt{5^x-7} \geq \sqrt{5^x+7};$

g) $\sqrt{13^x-5} \leq \sqrt{2(13^x+12)} - \sqrt{13^x+5};$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1,25 > 0;$

i) $)\log 3)^{3x-7} > (\log_3 10)^{7x+3};$

j) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52;$

k) $2^{2x+2} + 6^x - 2\cdot 3^{2x+2} > 0;$

l) $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x-1};$

m) $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1} < \dfrac{10}{3-2x}.$

4. Resuelva las inecuaciones:

a) $\log_{0,5}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leq Cot\dfrac{3\pi}{4};$

b) $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2-4x+3}{4} < 2Cot\dfrac{3\pi}{4};$

c) $\dfrac{1}{\log_2 x} \leq \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}};$

d) $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} < \dfrac{\log_2\sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x};$

e) $\log_(4+2x-x^2)\left(\dfrac{1-x}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2};$

f) $\log_8(x^2-4x+3) > Tan\dfrac{\pi}{4};$

g) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geq 0;$

h) $\log_4(2x^2+3x+1) \geq \log_2(2x+2);$

i) $\dfrac{|3-5x|-4}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} 3|x|}} \leq 0;$

j) $\log_(x+1)(x^2+x-6)^2 \geq 4;$

k) $\log_{1/2}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leq -1;$

l) $\log_2\dfrac{4}{x+3} > \log_2(2-x);$

m) $\log_{x-2}(2x-3) > \log x - 2(24-6x);$

n) $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2 < 0;$

o) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5;$

p) $x^{\log x} > 10;$

q) $(8-x)^{\log_2^2(8-x)} \leq 2^{3x-4};$

r) $\log_3\dfrac{3}{x-1} > \log_3(5-x);$

s) $\log_{1/4}(2-x) > \log_{1/4}\dfrac{2}{x+1};$

t) $\log_{1/2}(5+4x-x^2) > -3;$

u) $\log_{0,1}(x^2+75) - \log_{0,1}(x-4) \leq -2;$

v) $\log_{1/5}(2x+5) < \log_{1/5}(16-x^2) - 1;$

w) $\log_5(x+27) - \log_5(16-2x) > \log_5 x;$

x) $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \dfrac{2}{3}.$

5. Resuelva las inecuaciones:

a) $\log_{|x-1|} 0,5 > 0,5;$

b) $\log_{0,2}^2(x-1) > 4;$

c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5;$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{1/9}(x^2-3x+1)} < 1;$

e) $\log_x(x-1) \geq 2;$

f) $\log_x\sqrt{21-4x} > 1;$

g) $\log_x\dfrac{x+3}{x-1} > 1;$

h) $\log_x(16-6x-x^2) \leq 1;$

i) $\log_{x^2-3} 729 > 3;$

j) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0;$

k) $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 > 1;$

l) $2^{\log_8(x^2-6x+9)} \leq 3^{2\log_x\sqrt{x}-1};$

m) $\dfrac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{1/3}(x+3);$

n) $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x > 2;$

o) $\log_x(x+1) < \log_{1/x}(2-x);$

p) $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4) > 1;$

q) $\log_{|x+6|} 2\cdot\log_2(x^2-x-2) \geq 1;$

r) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0;$

s) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leq \dfrac{1}{2};$

t) $\log_2(x+1)^2 + \log_2\sqrt{x^2+2x+1} > 6;$

u) $\log_{1/5} x + \log_4 x > 1;$

v) $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 > (\log_x\sqrt{5})^2.$

6. Resuelva las inecuaciones:

a) $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\cdot\log_{\sqrt{2}}\dfrac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2;$

b) $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}2{,}5x}>1;$

c) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2;$

d) $0,2^{6-\frac{3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x}-1};$

e) $0,4^{\log_3\frac{3}{x}\cdot\log_3 3x}>6,25^{\log_3 x^2+2};$

f) $2^{\log^2_{0,5}x}+x^{\log_{0,5}x}>2,5;$

g) $3^{\log x+2}<3^{\log x^2+5}-2;$

h) $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17;$

i) $\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1}3>2,5;$

j) $\log_3(3^x-1)\log_{1/3}(3^{x+2}-9)>-3;$

k) $\log_2[\log_3(2-\log_4 x)]<1;$

l) $x+\log(1+2^x)>x\log 5+\log 6;$

m) $\log_2(9^x+3^{2x-1}-2^{x+1/2})<x+3,5;$

n) $\log_{1/2}x+\sqrt{1-4\log^2_{1/2}x}<1;$

o) $\sqrt{1-9\log^2_{1/8}x}>1-4\log_{1/8}x;$

p) $\log_{x/2}8+\log_{x/4}8<\dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4};$

q) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot_2 4x>1;$

r) $\log_2\log_{1/2}(x^2-2)<1;$

s) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2\log_{1/5}(x^2-4/5)}\leq 1;$

t) $0,3^{\log_{1/3}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1;$

u) $\log_3[\log_2(2-\log_4 x)-1]<1;$

v) $\log_5\log_3\log_2(2^{2x}-3\cdot 2^x+10)>0;$

w) $\log_2(1+\log_{1/9}x-\log_9 x)<1;$

x) $\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0.$

7. Resuelva las inecuaciones:

a) $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0;$

b) $\log_x\log_2(4^x-12)\leq 1;$

c) $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0;$

d) $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0;$

e) $\dfrac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0;$

f) $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0;$

g) $\dfrac{\log 7-\log(-8-x^2)}{\log(x+3)}>0;$

h) $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_3(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac{1}{2};$

i) $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5}<\dfrac{1}{2};$

j) $\dfrac{\log\sqrt{x+7}-\log 2}{\log 8-\log(x-5)}<-1;$

k) $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}<3;$

l) $\log_5(x+3)\geq\log_{x+3}625;$

m) $\log_2 x\cdot\log_3 2x+\log_3 x\cdot\log_2 3x\geq 0;$

n) $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x)\geq -2;$

o) $\log_{\sqrt{3}/3}(2^{x+2}-4^x)\geq -2;$

p) $25^{\log^2_5 x}+x^{\log_5 x}\leq 30;$

q) $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1;$

r) $\dfrac{1}{\log_{0,5}\sqrt{x+3}}\leq\dfrac{1}{\log_{0,5}(x+1)};$

s) $\dfrac{1}{\log_2 x}\leq\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}};$

t) $\dfrac{\sqrt{\log^2_{0,5}x-81}+2}{\log_{0,5}x-1}<1;$

u) $|x-1|^{\log_2(4-x)}>|x-1|^{\log_2(1+x)};$

v) $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\leq 1;$

w) $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1}<\dfrac{6}{2x-1};$

x) $\dfrac{6}{2x+1}>\dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}.$

8. Resuelva las inecuaciones:

a) $\sqrt{\log_4\dfrac{2x^2-3x+3}{2}}+1>\log_2\dfrac{2x^2-3x+3}{2};$

b) $\log_{0,2}(x^3+8)-0,5\log_{0,2}(x^2+4x+4)\leq\log_{0,2}(x+58);$

c) $\log_2(x^2-x-6)+\log_{1/2}(x-3)<-\log_{1/\sqrt{2}}3;$

d) $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{7-3x}{x+2}-\log_{1/\sqrt{2}}(x+2)>\log_{1/2}4;$

e) $2,25^{\log_2(x^2-3x-10)} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2+4x+4)}$;

f) $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{1/2}\dfrac{x^3}{8}\right)^2 + 9\log_2\dfrac{32}{x^2} < 4(\log_{1/2} x)^2$;

g) $9^{\log_2(x-1)-1} - 8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2} > 9^{\log_2(x-1)} - 16\cdot 5^{\log_2(x-1)}$;

h) $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$;

i) $\log_{0,5}(x+2)\log_2(x+1) + \log_{x+1}(x+2) > 0$.

9. Resuelva los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases}\log_x(x+2) > 2\\ (x^2-8x+13)^{4x-6} < 1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}(x-1)\log 2 + \log(2^{x+1}+1) < \log(7\cdot 2^x + 12)\\ \log_x(x+2) > 2\end{cases}$

9.7. Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición 9.6 Función exponencial
Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva. En una función exponencial, la variable independiente x es el exponente de una constante positiva conocida como la base de la función.

Así, una función exponencial es fundamentalmente diferente de una función potencial donde la base es la variable y el exponente es una constante.

El hecho de trabajar con funciones exponenciales requiere el uso de la notación exponencial y las leyes algebraicas de exponentes.

Corrientemente, en álgebra elemental, a^x $(a > 0)$ tiene significado sólo cuando x es un número racional. En cálculo es importante definir a^x para valores irracionales de x.

Definición 9.7 Logarítmo de un número
Sean $a > 0$ y $a \neq 1$. El número k se llama logaritmo del número $b > 0$ en el sistema de base a si $a^k = b$.

El logaritmo del número b en el sistema de base a se designa por $\log_a b$. Por la misma definición $a^{\log_a b}$.

Definición 9.8 Función exponencial
Una función de la forma $h(x) = ka^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ se llama función exponencial con base a, y la curva correspondiente se conoce como curva exponencial.

Sea $a > 0$ el número positivo dado, $a \neq 1$. La función exponencial $f(x) = a^x$ está definida en $\mathbb{R}$, el intervalo $(0; +\infty)$ es el conjunto de sus valores. Con $a > 1$ la función estrictamente crece, con $0 < a < 1$, estrictamente decrece, los valores negativos de x producen valores positivos de $f(x)$. La función exponencial $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ es inversible. La función inversa recibe el nombre de logarítmica y se designa con $f(x) = \log_a x$, ella está definida en el intervalo $(0; +\infty)$, el conjunto $\mathbb{R}$ es el conjunto de sus valores.

Con $a > 1$ la función logarítmica estrictamente crece y la tasa de crecimiento para $x > 1$ es lenta, con $0 < a < 1$ estrictamente decrece y la tasa de decrecimiento para $x > 1$ es lenta. Si $a > 1$, entonces, cuando x tiende a 0, la función decrece rápidamente. Si $0 < a < 1$, entonces, cuando x tiende a 0, la función crece rápidamente. Si $a > 1$, la función es negativa para $0 < x < 1$ y positiva para $x > 1$. Si $0 < a < 1$, la función es positiva para $0 < x < 1$ y negativa para $x > 1$.

Los gráficos de las funciones

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad y \quad f(x) = \log_a x, \quad x \in (0; +\infty)$$

son simétricos entre sí con relación a la recta $y = x$.

Sea $a \neq 1$ un número positivo. Decimos que y es el logaritmo de x en base a si $a^y = x$. Es decir $\log_a x = y$.

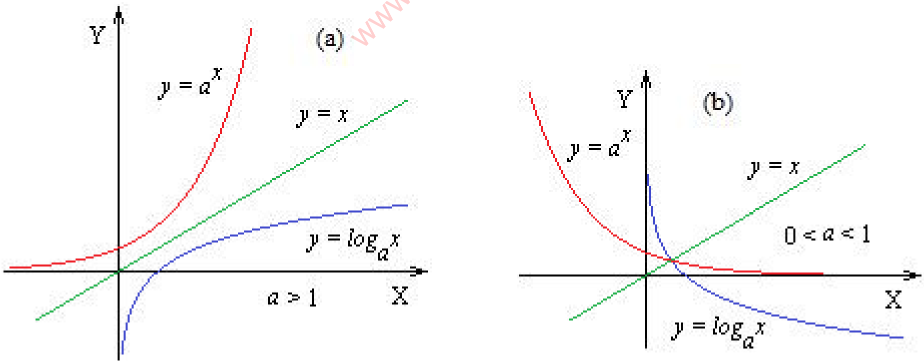
Sea x un número positivo. El logaritmo natural de x es $\log_e x = \ln x$. Nótese que $\ln x$ solamente se calcula para valores de x entre 1 y 10.

Sean x y a números positivos, $a \neq 1$. Entonces

$$\frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Sea a un número positivo. Entonces, $a^x = e^{x \ln a}$ para cada número real x.

Las gráficas de algunas funciones exponenciales para $a > 1$ se exponen en la figura (a) y en (b) para $0 < a < 1$.



La función exponencial posee las siguientes características:

- El dominio es $(-\infty; +\infty)$;
- El codominio es $(0; +\infty)$;
- La función está acotada inferiormente: $y > 0$;
- La función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;
- La función no es periódica;

- La función no es par ni tampoco impar;
- Si $a > 1$, la función $y = a^x$ crece en todo el dominio; si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ decrece en todo el dominio;
- El punto $(0, 1)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Ejemplo 9.13 *Hallar el dominio de la función:*
a) $f(x) = \frac{1}{16^{x^2} - 2^x}$; **b)** $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$.
Solución
a) La función está definida si se cumple que $16^{x^2} - 2^x \neq 0$, lo cual implica que

$$16^{x^2} \neq 2^x \quad \Rightarrow \quad 2^{4x^2} \neq 2^x \quad \Rightarrow \quad 4x^2 \neq x$$

$$x(4x-1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \text{ y } x \neq \frac{1}{4}$$

Por lo tanto el dominio de la función es

$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

b) La función está definida si $2^x - 3^x \geq 0$, es decir:

$$3^x \leq 2^x \quad \Rightarrow \quad x\log 3 \leq x\log 2 \quad \Rightarrow \quad x(\log 3 - \log 2) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0.$$

Por lo tanto el dominio de la función es $x \in (-\infty; 0]$.

Ejemplo 9.14 *Hallar el conjunto imagen de la función:*

$$f(x) = 4^x - 2^x + 1.$$

Solución
Transformamos la ecuación de la siguiente manera:

$$y = 2^{2x} - 2^x + 1 \;\Rightarrow\; y - 1 = 2^{2x} - 2^x \;\Rightarrow\; y - 1 = \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}} = 2^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_2\left(\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}\right)$$

La función está definida si $\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}} > 0$, lo cual implica que $y - \frac{3}{4} \geq 0$, de donde $y \geq \frac{3}{4}$. Por lo tanto el conjunto imagen está dado por $y \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Ejemplo 9.15 *Determinar la paridad de las funciones:*
a) $f(x) = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{-x}}$; **b)** $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$.
Solución
a) $f(-x) = \frac{1}{3^{-x}} - \frac{1}{3^{-(-x)}} = \frac{1}{3^{-x}} - \frac{1}{3^x} = -\left(\frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{-x}}\right) = -f(x).$
Por tanto, la función es impar.
b) $f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^{-(-x)}}{3^{-x} - 3^{-(-x)}} = \frac{2^{-x} + 2^x}{3^{-x} - 3^x} = -\frac{2^{-x} + 2^x}{3^x - 3^{-x}} = -f(x)$
Por tanto, la función es par.

Ejemplo 9.16 *Hallar de ser posible la inversa de la función dada, indique su dominio:*

$$f(x) = \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}.$$

Solución

$$y = \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \quad \Rightarrow \quad y(3^x + 2^x) = 3^x - 2^x \quad \Rightarrow \quad (y+1)2^x = (1-y)3^x$$

$$\log(y+1) + x\log 2 = \log(1-y) + x\log 3 \quad \Rightarrow \quad x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+y}{1-y}.$$

La función está definida si

$$\frac{1+y}{1-y} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{y-1} < 0$$

De esta desigualdad, obtenemos $y \in (-1; 1)$.

Una función $y = \log_a x$, donde a es un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina función logarítmica. La función logarítmica posee las siguientes características:

- El dominio es $(0; +\infty)$;
- El codominio es $(-\infty; +\infty)$;
- La función no está acotada ni superior ni inferiormente;
- La función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;
- La función no es periódica;
- La función no es par ni tampoco impar;
- Si $a > 1$, la función $y = \log_a x$ crece en todo el dominio; si $0 < a < 1$, la función $y = \log_a x$ decrece en todo el dominio;
- El punto $(1, 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

De nuestra experiencia con funciones inversas es intuitivamente posible que si la función $f(x)$ es biunívoca y continua sobre su dominio, entonces su inversa $f^{-1}(x)$ es continua sobre su dominio. Como se dijo anteriormente, la función a^x es continua sobre su dominio $\mathbb{R}$. Consecuentemente su inversa $\log_a x$ es continua sobre su dominio $(0; +\infty)$. De $y = \log_a x$ se sigue que si $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, entonces $x = a^{\log_a x}$. También, ya que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$, tendremos que $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

Ejemplo 9.17 *Hallar el dominio de la función:*

a) $f(x) = \log_{3+x}(x^2 - 1)$; **b)** $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{x-1}}$.

Solución

a) Transformamos la ecuación haciendo uso de las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \log_{3+x}(x^2 - 1) = \frac{\log(x^2 - 1)}{\log(3 + x)}.$$

La función está definida si

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 3 + x > 0 \\ \log(3 + x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0 \\ 3 + x > 0 \\ 3 + x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \in (-3; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty) \end{cases}$$

Por lo tanto el dominio de la función es $x \in (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$.
b) Transformamos la ecuación haciendo uso de las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{x-1}} = \sqrt{\frac{\log \frac{2x-3}{x-1}}{\log 3}}.$$

La función está definida si $\log \frac{2x-3}{x-1} \geq 0$, lo cual implica que $\frac{2x-3}{x-1} \geq 1$, es decir

$$\frac{2x-3}{x-1} - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{x-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty).$$

Por lo tanto el dominio de la función es $x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Ejemplo 9.18 *Hallar el conjunto imagen de la función:*
a) $f(x) = \log_3 x + \log_x 3$; **b)** $f(x) = \sqrt{2\log_2 x - \log_2^2 x}$.
Solución
a) Transformamos la ecuación de la siguiente manera:

$$y = \log_3 x + \log_x 3 = \frac{\log x}{\log 3} + \frac{\log 3}{\log x} = \frac{\log^2 x + \log^2 3}{\log 3 \log x}$$

$$y \log 3 \log x - \log^2 x = \log^2 3 \quad \Rightarrow \quad \log^2 x - y \log 3 \log x = -\log^2 3$$

$$\left(\log x - \frac{1}{2} y \log 3\right) 2 = \frac{1}{4} y^2 \log^2 3 - \log^2 3 \quad \Rightarrow \quad \log x - \frac{1}{2} y \log 3 = \sqrt{\frac{1}{4} y^2 - 1} \cdot \log 3$$

$$\log x = \left(\sqrt{\frac{1}{4} y^2 - 1} + \frac{1}{2} y\right) \cdot \log 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{\sqrt{\frac{1}{4} y^2 - 1} + \frac{1}{2} y}.$$

La función está definida si $\sqrt{\frac{1}{4} y^2 - 1} \geq 0$, es decir

$$y^2 - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (y+2)(y-2) \geq 0.$$

Por lo tanto el conjunto imagen está dado por $y \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
b) Transformamos la ecuación de la siguiente manera:

$$y^2 = 2\log_2 x - \log_2^2 x \quad \Rightarrow \quad \log_2^2 x - 2\log_2 x = -y^2$$

$$(\log_2 x - 1)^2 - 1 = -y^2 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x = 1 + \sqrt{1 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1 + \sqrt{1 - y^2}}$$

La función está definida si $1 - y^2 \geq 0$, es decir:

$$y^2 - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (y+1)(y-1) \leq 0.$$

Por lo tanto el conjunto imagen está dado por $y \in [-1; 1]$.

Ejemplo 9.19 *Determinar la paridad de la función:*

$$f(x) = ln^2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Solución

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln^2\left((-x)+\sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln^2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln^2\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln^2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= \ln^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es impar.

Ejemplo 9.20 *Hallar de ser posible la inversa de la función dada, indique su dominio:*

$$f(x) = log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Solución

$$y = \log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad\Rightarrow\quad yloga = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$a^y = x+\sqrt{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad (a^y-x)^2 = x^2+1$$

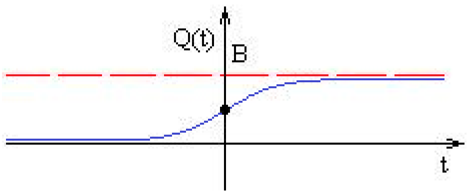
$$a^{2y}-2a^yx = 1 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{2}\left(a^y-a^{-y}\right).$$

Esta función está definida para todo $y \in \mathbb{R}$.

Las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan un papel especial en las matemáticas aplicadas. A continuación se presenta una muestra de situaciones prácticas provenientes de las ciencias que pueden describirse matemáticamente en términos de tales funciones.

CURVAS LOGISTICAS

La gráfica de una función de la forma $Q(t) = \dfrac{B}{1+Ae^{-Bkt}}$, donde B, A y k son constantes positivas, es una curva en forma de S. El término curva logística también se utiliza para referirse a una gráfica de este tipo.



Para representar la función logística $Q(t) = \dfrac{B}{1+Ae^{-Bkt}}$, observe que la intersección con el eje vertical es

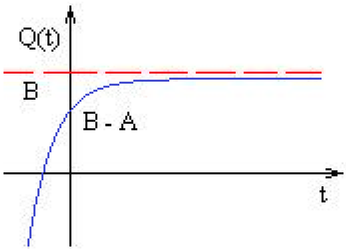
$$Q(0) = \frac{B}{1+Ae^0} = \frac{B}{1+A}.$$

Las curvas logísticas son modelos bastante precisos del crecimiento de la población cuando los factores ambientales imponen un límite superior al tamaño posible de la población. También describen la propagación de epidemias y rumores en una comunidad.

DATACION MEDIANTE CARBONO 14

El dióxido de carbono en el aire contiene el isótopo radiactivo ^{14}C (carbono 14) así como el isótopo estable ^{12}C (carbono 12). Las plantas vivas absorben dióxido de carbono del aire, lo que implica que la razón de ^{14}C a ^{12}C en una planta viva (o en un animal que se alimenta de plantas) es la misma que hay en el aire. Cuando una planta o un animal mueren, la absorción de dióxido de carbono cesa. El ^{12}C que ya está en la planta o el animal permanece igual que en el momento de la muerte, mientras que el ^{14}C decrece, y la razón de ^{14}C a ^{12}C decrece exponencialmente. Es razonable suponer que la razón R_0 de ^{14}C a ^{12}C en la atmósfera es el mismo hoy que en el pasado, de manera que la razón de ^{14}C a ^{12}C en una muestra está dada por una función de la forma $R(t) = R_0 e^{-kt}$. El promedio de vida del ^{14}C es 5730 años. Al comparar $R(t)$ con R_0, los arqueólogos pueden estimar la edad de la muestra.

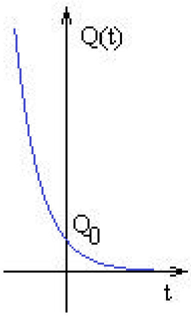
CURVAS DE APRENDIZAJE



La gráfica de una función de la forma $Q(t) = B - Ae^{-kt}$, donde B, A y k son constantes positivas, se llama curva de aprendizaje. El nombre surge cuando los psicólogos descubrieron que funciones de esta forma describen con frecuencia, la relación entre la eficiencia con que un individuo realiza una tarea y la cantidad de capacitación o experiencia que éste ha tenido.

En la figura se muestra una gráfica con estas características. El comportamiento de la gráfica cuando t crece sin límite, refleja el hecho de que al final un individuo se aproximará a una eficiencia máxima, y que la capacitación adicional tendrá poco efecto sobre el desempeño.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL



Si una cantidad $Q(t)$ crece de acuerdo con una ley de la forma $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, donde Q_0 y k son constantes positivas, se dice que experimenta un crecimiento exponencial. Por ejemplo, en ausencia de restricciones ambientales, la población crece en forma exponencial.

Las cantidades que aumentan exponencialmente se caracterizan por el hecho de que su ritmo de crecimiento es proporcional a su tamaño y que su razón porcentual de cambio es constante. $Q(t)$ crece exponencialmente si $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ donde k es una constante positiva y Q_0 es el valor inicial $Q(0)$. Para representar gráficamente la función $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, observe que $Q(t)$ es siempre positiva, que $Q(0) = Q_0$, que $Q(t)$ crece sin límite a medida que t aumenta sin límite y que $Q(t)$ se aproxima a cero a medida que t decrece sin límite.

Ejemplo 9.21 *Se proyecta que dentro de t años la población de cierto país será* $P(t) = 50e^{0,02t}$ *millones:*

a) *¿Cuál es la población actual?*

b) *¿Cuál será la población dentro de 30 años?*

Solución

a) La población actual se calcula haciendo $t = 0$

$$P(0) = 50e^{(0,02)(0)} = 50 \text{ millones.}$$

b) La población dentro de 30 años será

$$P(30) = 50e^{(0,02)(30)} \approx 91,1 \text{ millones.}$$

Ejemplo 9.22 *El número total de hamburguesas vendidas por una cadena nacional de comida rápida crece exponencialmente. Si se vendieron 5 millones en 2008 y 8 millones en 2009, ¿cuántas se venderán en 2010?*

Solución

Sea $Q(t)$ el número de hamburguesas vendidas después de t años. Como el número de hamburguesas crece exponencialmente, y puesto que al comienzo (2008) se vendieron 5 millones, Q es una función de la forma $Q(t) = 5e^{kt}$. Ya que pasado 1 año (2009) se vendieron 8 millones, se obtiene que

$$8 = 5e^{k} \quad \Rightarrow \quad e^{k} = \frac{8}{5}.$$

Para hallar cuántas hamburguesas se venderán en el segundo año (2010), calculamos $Q(2)$

$$Q(2) = 5e^{2k} = 5\left(e^{k}\right)^{2} = 5\left(\frac{8}{5}\right)^{2} = \frac{64}{5} = 12,8$$

Es decir, se venderán 12.8 millones de hamburguesas en el 2010.

Ejemplo 9.23 *La densidad de población a x kilómetros del centro de una ciudad es $D(x) = 12e^{-0,07x}$ miles de personas por kilómetro cuadrado:*

a) *¿Cuál es la densidad de población en el centro de la ciudad?*

b) *¿Cuál es la densidad de población a 5 kilómetros del centro de la ciudad?*

Solución

a) La densidad de población en el centro de la ciudad es

$$D(0) = 12e^{(-0,07)(0)} = 12$$

es decir habrá doce mil personas.

b) La densidad de población a 5 kilómetros del centro de la ciudad es

$$D(5) = 12e^{(-0,07)(5)}$$

es decir, la densidad de población será de ocho mil quinientas personas.

Ejemplo 9.24 *La producción diaria de un trabajador que ha estado en el trabajo t semanas está dada por una función de la forma $Q(t) = 40 - Ae^{-kt}$. Al comienzo el trabajador podía producir 20 unidades por día, y después de una semana puede producir 30 unidades por día. ¿Cuántas unidades por día producirá el trabajador después de 3 semanas?*

Solución

Al comienzo, es decir $t = 0$, $Q(0) = 20$, entonces

$$20 = 40 - Ae^{-0k} = 40 - A \quad \Rightarrow \quad A = 20.$$

Después de 1 semana, $t = 1$, $Q(1) = 30$, entonces

$$30 = 40 - Ae^{-k} \quad \Rightarrow \quad Ae^{-k} = 10 \quad \Rightarrow \quad e^{-k} = \frac{1}{2}.$$

Cuando el trabajador tiene 3 semanas, $t = 3$, tenemos

$$Q(t) = 40 - Ae^{-3k} = 40 - A\left(e^{-k}\right)^{3} = 40 - 20\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 37,5.$$

Es decir, el trabajador producirá aproximadamente 38 unidades por día.

Ejemplo 9.25 *Un arqueólogo ha encontrado un fósil en el que la razón de ^{14}C a ^{12}C es $\frac{1}{5}$ de la razón encontrada en la atmósfera. Aproximadamente, ¿cuál es la edad del fósil?*

Solución

La edad del fósil es el valor de t para el que $R(t) = \frac{1}{5}R_0$, es decir, para el cual

$$\frac{1}{5}R_0 = R_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} = e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{5} = -kt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 5}{k}$$

Para hallar k, sabemos que el promedio de vida del ^{14}C es 5730 años, entonces

$$R(5730) = \frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-5730k} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-5730k} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -5730k$$

Por lo tanto $k = \frac{\ln 2}{5730}$. De esta manera, la edad del fósil es

$$t = \frac{\ln 5}{k} = \frac{5730 \ln 5}{\ln 2} \approx 13305$$

Es decir, el fósil tiene aproximadamente 13305 años.

Ejemplo 9.26 *Según un modelo logístico basado en el supuesto de que la Tierra no puede soportar más de 40000 millones de personas, la población mundial (en miles de millones) t años después de 1980 está dada por una función de la forma $P(t) = \frac{40}{1+Ce^{-kt}}$, donde C y k son constantes positivas. Halle la función de esta forma que concuerde con el hecho de que la población mundial era aproximadamente de 4000 millones en 1980 y de 6000 millones en 2000. ¿Qué predice su modelo con respecto a cuál será la población en el año 2010?*

Solución

Sabemos que cuando $t = 0$ (1980), P(0) = 4000, es decir

$$400 = \frac{40}{1 + Ce^{-0k}} \quad \Rightarrow \quad 400 = \frac{40}{1 + C} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{99}{100}.$$

Cuando $t = 20$ (2000), $P(20) = 6000$, es decir

$$6000 = \frac{40}{1 + Ce^{-20k}} \quad \Rightarrow \quad Ce^{-20k} = -\frac{149}{150} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{20}\ln\frac{298}{297}.$$

Cuando $t = 30$ (2010), entonces

$$P(30) = \frac{40}{1 - \frac{99}{100}e^{-30k}} = \frac{40}{1 - \frac{99}{100}e^{30\frac{1}{20}\ln\frac{298}{297}}} = \frac{40}{1 - \frac{99}{100}\left(\frac{298}{297}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Es decir, la población mundial en el año 2010 será aproximadamente de 8007 millones de personas.

9.8. Tarea

1. Determine el valor de x, para que se cumpla:
   a) $f(x+2) \geq g\left(\frac{x}{2}\right)$ si $f(x) = 5^{3x+3} - 2^{3x+1}$ y $g(x) = 2^{x+3} + 4 \cdot 5^{x+4}$;
   b) $f(x-2) \leq g\left(\frac{x}{3}\right)$ si $f(x) = 3^{x-4} + 2^x$ y $g(x) = 3^{2x} + 2^{2x}$.

2. ¿Con qué valores de a el dominio de la función $f(x)$ contiene el dominio de la función $g(x)$?

$$f(x) = \log\left(x^2 + a\right), \quad g(x) = \frac{x^2 + x - a}{x}.$$

3. Determine el dominio de las siguientes expresiones:

a) $f(x)=2^{\sqrt{x-1}}+3^{\sqrt{x+1}}$;

b) $f(x)=e^{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}$;

c) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x^2-2x-3}}}{x^2-1}$;

d) $f(x)=10^{\frac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-x-6}}}$;

e) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,e^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$;

f) $f(x)=\dfrac{3^{\sqrt{x^2-1}}}{2^{\sqrt{x^2+2x-15}}}$;

g) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2-5}{x2-1}}$;

h) $f(x)=\log_x\sqrt{x^2-4}$;

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x-5}}{10^{x^2-1}-10^{x^2+1}}$;

j) $f(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$;

k) $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-4x-5\right)}{\ln\sqrt{x^2-2x-3}}$;

l) $f(x)=\log_{\sqrt{x^2-x-6}}\left(x^2-3\right)$;

m) $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2+3x-4\right)}{x^2-5x+6}$.

4. Determine el dominio de las siguientes expresiones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{2^{x^2-5x+6}-2^{x^2+3x-4}}$;

b) $f(x)=5^{\sqrt{x^2+2x-3}}-3^{\sqrt{x^2+5x+6}}$;

c) $f(x)=e^{\sqrt{5x+3}}-\ln\left(x^2+5x+6\right)$;

d) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-15}\,\ln\left(x^2-1\right)$.

5. Investigar la monotonía de la función y construya su gráfica:

$$f(x)=\ln\left(\frac{3x-x^2}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^5+1}\right)$$

6. Investigar la monotonía de la función y construya su gráfica:

a) $f(x)=2^{1-x}-2^{x-1}$;

b) $f(x)=\log\left(1+x^3\right)$;

c) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

d) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

e) $f(x)=\log_2\left(8x-x^2\right)$;

f) $f(x)=2\cdot 3^{1-x}-9^{-x}$.

7. Demuestre que el gráfico de la función $f(x)=\ln(1-e^x)$ es simétrico con relación a la recta $f(x)=x$.

8. Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de la gripe AH1N1, aproximadamente $f(t)=\frac{2}{1+3e^{-0,8t}}$ miles de personas han contraído la enfermedad:
a) Trace la gráfica de $f(t)$.
b) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad al comienzo?
c) ¿Cuántas habían contraído la enfermedad al final de 3 semanas?
d) Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas en total contraerán la enfermedad?

9. Demuestre que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son recíprocamente inversas:

$$f(x)=-e^{\frac{1-x^2}{2}},\ x\in[0;+\infty);\quad g(x)=\sqrt{1-2\ln(-x)},\ x\in\left[-\sqrt{e};0\right).$$

10. Cuando cierta maquinaria industrial tenga t años, su valor de reventa será $V(t)=4800e^{-\frac{t}{5}}$ dólares:
a) Dibuje la gráfica de $V(t)$. ¿Qué le sucede al valor de la maquinaria cuando t crece sin límite?
b) ¿Cuál era el valor de la maquinaria cuando estaba nueva?
c) ¿Cuál será el valor de la maquinaria después de 5 años?